

《应用随机过程》第一次作业和参考答案

对外经济贸易大学版本

一、 若离散型随机变量X只取非负整数值，证明：

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k)$$

参考答案：(方法一)

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^k P(X = k) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k \geq m} P(X = k) = \sum_{m=1}^{\infty} P(X \geq m)$$

(方法二) 直观来说：

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) \\ &= P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \cdots \\ &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots \\ &\quad + P(X = 2) + P(X = 3) + \cdots \\ &\quad + P(X = 3) + \cdots \\ &\quad + \cdots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) \end{aligned}$$

二、 若连续型随机变量X取非负值，证明：

$$1) E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F(x)) dx$$

$$2) E(X^n) = \int_0^{\infty} n x^{n-1} (1 - F(x)) dx \quad (n \geq 1)$$

参考答案：

$$E(X^n) = \int_0^{\infty} x^n f(x) dx \quad (n \geq 1)$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_0^x n y^{n-1} dy \right] f(x) dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[\int_y^{\infty} f(x) dx \right] n y^{n-1} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} [1 - F(y)] n y^{n-1} dy \\
&= \int_0^{\infty} n x^{n-1} [1 - F(x)] dx
\end{aligned}$$

当 $n=1$ 时即为 (1) 问答案。

三、 A,B,C 三位申请假释的囚犯，有着同样良好的记录。假释委员会通过了其中 2 位囚犯的申请，但是囚犯们还不知道是他们 3 人中的哪 2 位。囚犯 A 有个预警朋友知道谁将被允许假释。囚犯 A 觉得不太好意思直接问自己是否被释放，于是他想问 B 和 C 是否被释放。他认为他现在被释放的概率是 $2/3$ ，一旦预警回答“B 将被释放”，那么它自己被释放的概率就变成了 $1/2$ 。因此 A 打消了问预警的念头，他害怕自己被释放的概率减小。这种想法对吗？如果不对请说明错在哪？

参考答案：他把样本空间考虑错了。假设谁被释放这是一个事件 m ：A, B, C 被释放的情况有 AB, AC, BC 三种情况，再考虑另一个事件 n ，狱警回答 B 或 C（因为 A 只询问狱警 B 和 C 的情况），根据贝叶斯公式，当狱警说 B 被释放时，A 被释放的后验概率为

$$\begin{aligned}
P(m = AB|n = B) &= \frac{P(m = AB, n = B)}{P(n = B)} \\
&= \frac{P(m = AB) \times P(n = B|m = AB)}{P(m = AB) \times P(n = B|m = AB) + P(m = BC) \times P(n = B|m = BC)} \\
&= \frac{\frac{1}{3} \times 1}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

四、 在通讯渠道中，可传送字符 AAAA，BBBB，CCCC 三者之一，假定传送这三者的概率分别为 0.3,0.4,0.3。由于通讯噪音的干扰，正确接收到被传送

字母的概率为 0.6，而接收到其他字母的概率都为 0.2，假定前后字母是否被误收互不影响，若接收到的是 ABCA，问被传送的字母是 AAAA 的概率。

参考答案：记事件“发 AAAA”为 A^4 ，事件“发 BBBB”为 B^4 ，事件“发 CCCC”为 C^4 ，事件“发 ABCA”为 D ，则 $P(A^4) = 0.3$ ， $P(B^4) = 0.4$ ， $P(C^4) = 0.3$ ，为求 $P(A^4|D)$ ，考虑到发 AAAA，而收到 ABCA，有两个字母被准确收到，另外两个字母被误收，故

$$P(D|A^4) = 0.6^2 \times 0.2^2 = 0.0144。$$

同理可求得 $P(D|B^4) = P(D|C^4) = 0.6 \times 0.2^3 = 0.0048$ ，

欲求的概率是 $P(A^4|D)$ ，而事件 A^4, B^4, C^4 两两互不相容，又 D 能且只能与 A^4, B^4, C^4 之一同时发生，由贝叶斯公式得欲求的概率为

$$\begin{aligned} P(A^4|D) &= \frac{P(A^4)P(D|A^4)}{P(A^4)P(D|A^4) + P(B^4)P(D|B^4) + P(C^4)P(D|C^4)} \\ &= \frac{0.3 \times 0.0144}{0.3 \times 0.0144 + 0.4 \times 0.0048 + 0.3 \times 0.0048} = \frac{9}{16} = 0.5625。 \end{aligned}$$

五、 如果股票的价格模型可以用如下的二叉树模型来描述，在0时刻股票的价格为 S_0 ，在1时刻股票价格为如下的随机变量 S_1

$$S_1 = \begin{cases} u * S_0 & \text{概率为 } p_1 \\ d * S_0 & \text{概率为 } p_2 \end{cases} \quad (*)$$

其中， $u > 1, 0 < d < 1, 1 > p_1 > 0, p_1 + p_2 = 1$ 。

(1) 计算股票收益率 $(S_1 - S_0)/S_0$ 的方差。

(2) 如果 K 为一常数，股票价格由(*)中的给出 S_0, S_1 给出，计算如下的数学期望：

$$f = E[\max(S_1 - K, 0)]$$

并说明 f 是关于 K 是一个递减的凸(convex)函数。

参考答案：

$$(1). \text{VaR}\left(\frac{S_1 - S_0}{S_0}\right) = \frac{1}{S_0^2} \text{VaR}(S_1)$$

$$\begin{aligned} \text{而} \text{VaR}(S_1) &= E(S_1^2) - E^2(S_1) = u^2 S_0^2 p_1 + d^2 S_0^2 p_2 - (u S_0 p_1 + d S_0 p_2)^2 \\ &= S_0^2 p_1 p_2 (u - d)^2 \end{aligned}$$

所以

$$\text{VaR}\left(\frac{S_1 - S_0}{S_0}\right) = \frac{1}{S_0^2} \text{VaR}(S_1) = p_1 p_2 (u - d)^2$$

(2).

$$\text{当 } K \leq dS_0, f = (uS_0 - K)p_1 + (dS_0 - K)p_2 = S_0(up_1 + dp_2) - K$$

$$\text{当 } dS_0 < K \leq uS_0, f = (uS_0 - K)p_1 + 0 \times p_2 = uS_0 p_1 - p_1 K$$

$$\text{当 } uS_0 < K, f = 0 \times p_1 + 0 \times p_2 = 0$$

$$\text{得到 } f = \begin{cases} S_0(up_1 + dp_2) - K, & K \leq dS_0 \\ uS_0 p_1 - p_1 K, & dS_0 < K \leq uS_0 \\ 0, & uS_0 < K \end{cases}$$

可验证 f 上任意不同两点 K_1, K_2 满足不等式

$$f[tK_1 + (1-t)K_2] \leq tf(K_1) + (1-t)f(K_2)$$

其中 $0 < t < 1$. 所以 f 为递减的下凸 (convex) 函数。

六、设随机变量 Y 的 $E(Y)$ 存在, $Y = \sum_{k=1}^{\infty} X_k$ 及 N 都是随机变量, 并且相互独立. N 仅取自然数,

$E(N)$ 存在. 证明: $E(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k) E(X_k)$

参考答案：

$$EY = E[E[Y|N]]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) P(N=n)\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(N=n) E\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n P(N=n) E(X_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \geq k}^{\infty} P(N = n) E(X_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(N \geq k) E(X_k)
\end{aligned}$$

七、求指数分布的特征函数。

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

参考答案：由定义 $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx$

$$\begin{aligned}
\text{从而 } \psi'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ix e^{itx} e^{-x^2/2} dx \\
&= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - it \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-x^2/2} dx \right) \\
&= -t\psi(t)
\end{aligned}$$

解初值问题 $\psi'(t) + t\psi(t) = 0$, $\psi(0) = 1$, 得 $\psi(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$

八、证明：若 a, b 为实数, $Y_1, Y_2, aY_1 + bY_2$ 的期望存在, 则

$$E[aY_1 + bY_2 | X] = aE[Y_1 | X] + bE[Y_2 | X]$$

成立。

参考答案：假设 X, Y_1, Y_2 的联合密度函数为 $f(x, y_1, y_2)$, 则有

$$\begin{aligned}
&E[aY_1 + bY_2 | X = x] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (ay_1 + by_2) f_{(Y_1, Y_2 | X)}(y_1, y_2 | x) dy_1 dy_2 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (ay_1 + by_2) \frac{f(x, y_1, y_2)}{f_X(x)} dy_1 dy_2 \\
&= a \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 \frac{f(x, y_1, y_2)}{f_X(x)} dy_1 dy_2 + b \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y_2 \frac{f(x, y_1, y_2)}{f_X(x)} dy_1 dy_2 \\
&= a \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 \frac{f_{(X, Y_1)}(x, y_1)}{f_X(x)} dy_1 + b \int_{-\infty}^{+\infty} y_2 \frac{f_{(X, Y_2)}(x, y_2)}{f_X(x)} dy_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a \int_{-\infty}^{+\infty} y_1 f_{(Y_1|X)}(y_1|x) dy_1 + b \int_{-\infty}^{+\infty} y_2 f_{(Y_2|X)}(y_2|x) dy_2 \\
 &= aE[Y_1|X=x] + bE[Y_2|X=x]
 \end{aligned}$$

证毕。

**批注：严格的来说需要通过一般条件数学期望抽象定义去证明。作为本科教学，
可以用离散或者连续密度证明。**

十、已知随机变量 X, Y 的联合密度函数是

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{9}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否正交、相关、独立。

已知随机变量 X, Y 的联合密度函数是

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{9}, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否正交、相关、独立。

参考答案：因为

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^3 \frac{(xy)^2}{9} dx dy = \frac{8}{3} \neq 0$$

所以 X 与 Y 不正交。

X 与 Y 的边际密度函数分别为：

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dy = \int_0^3 \frac{xy}{9} dy = \frac{x}{2}, \quad 0 \leq x < 2$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, y) dx = \int_0^2 \frac{xy}{9} dx = \frac{2y}{9}, \quad 0 \leq y < 3$$

所以有 $f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 。故 X 与 Y 相互独立，因而 X 与 Y 也不相关。