

《应用随机过程》第四次作业和参考答案

对外经济贸易大学版本

一、 N 个黑球和 N 个白球分别装在甲、乙两个袋中，每个袋中各有 N 个球。每次从袋中随机地取出一球互相交换后放回袋中，用 ξ_n 表示 n 次交换后甲袋中的黑球数目，试证 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 是马尔科夫链，并求一步转移概率。

参考答案：由题意可知 $\{\xi_n\}$ 的状态空间为 $I = \{0, 1, \dots, N\}$, $\forall n \geq 1, \forall I$ 中状态 $i_0, i_1, \dots, i_n, i, j$ 有

$$\begin{aligned} & P(\xi_{n+1} = j | \xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i) \\ &= \begin{cases} 1, & i = 0, j = 1 \text{ 或 } j = N, j = N - 1 \\ \left(\frac{i}{N}\right)^2, & 0 < i < N, j = i - 1 \\ \frac{2i(N-i)}{N^2}, & 0 < i < N, j = i \\ \left(\frac{N-i}{N}\right)^2, & 0 < i < N, j = i + 1 \end{cases} \\ &= P(\xi_{n+1} = j | \xi_n = i) \end{aligned}$$

故 $\{\xi_n\}$ 是马氏链，其一步转移概率为

$$P_{01} = P_{N, N-1} = 1$$

当 $0 < i < N$ 时，

$$P_{i, i-1} = \left(\frac{i}{N}\right)^2, P_{i, i} = \frac{2i(N-i)}{N^2}, P_{i, i+1} = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2$$

二、设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $P(X_n = 1) = p > 0$,

$P(X_n = -1) = q = 1 - p$ 。令 $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $\xi_n = Y_{2n} (n \geq 1)$ 。试证： $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 是马尔科夫链，并求其初始分布和一步转移概率矩阵。

参考答案： $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 的状态空间为 $I = \{2k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ，并且由 $\{X_n, n \geq 1\}$ 的独立同分布性质，对任意的正整数 n ，则有

$$\begin{aligned}
P(\xi_{n+1} = 2j | \xi_1 = 2i_1, \xi_2 = 2i_2, \dots, \xi_{n-1} = 2i_{n-1}, \xi_n = 2i) \\
&= \begin{cases} q^2, j = i - 1 \\ 2pq, j = i \\ p^2, j = i + 1 \end{cases} \\
&= P(\xi_{n+1} = 2j | \xi_n = 2i)
\end{aligned}$$

由此可知 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 是齐次马氏链, 且一步转移概率为

$$p_{2i, 2i-2} = q^2, p_{2i, 2i} = 2pq, p_{2i, 2i+2} = p^2$$

初始分布为

$$\begin{aligned}
P(\xi_1 = 2) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = p^2; \\
P(\xi_1 = 0) &= P(X_1 = 1)P(X_2 = -1) + P(X_1 = -1)P(X_2 = 1) = 2pq; \\
P(\xi_1 = -2) &= P(X_1 = -1)P(X_2 = -1) = q^2.
\end{aligned}$$

三、已知 6 月份, 甲、乙、丙 3 种型号的某商品在某地区有相同的销售额。7 月份甲保持原有顾客的 60%, 分别转移到乙、丙顾客的 10%和 30%; 乙保持原有顾客的 70%, 分别转移到甲、丙顾客的 15%和 15%; 丙保持原有顾客的 50%, 分别转移到甲、乙顾客的 30%和 20%。求 8 月份各型号商品的占有率及稳定状态时的占有率。

参考答案: 由于 6 月份甲乙丙型号的商品有相同的销售额, 故它们在市场中的占有率为 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$; 由题意可以写出 7 月份甲乙丙的商品型号之间的顾客转移的概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

所以, 8 月份各型号商品的占有率为

$$(p_{\text{甲}}, p_{\text{乙}}, p_{\text{丙}}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ 0.15 & 0.7 & 0.15 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix} = (0.350, 0.333, 0.317)$$

令 $\pi = (\pi_{\text{甲}}, \pi_{\text{乙}}, \pi_{\text{丙}}) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, 则有 $\pi = \pi P$, 即

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.6\pi_1 + 0.15\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_2 = 0.1\pi_1 + 0.7\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_3 = 0.3\pi_1 + 0.15\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.359 \\ \pi_2 = 0.327 \\ \pi_3 = 0.314 \end{cases}$$

四、一个圆周上共有 N 格 (按顺时针排列), 一个质点在该圆周上作随机游动, 移动的规则是: 质点总是以概率 p 顺时针游动一格, 以概率 $q = 1 - p$ 逆时针游动一格。试求转移概率矩阵。 $I = \{1, 2, 3, \dots, N\}$

参考答案: 将 N 个格点分别记为 $1, 2, \dots, N$, 用 X_n 表示 n 时指点的位置, 显然它只与 X_{n-1} 时的位置有关, 与 X_{n-1} 以前的位置无关, 满足马尔科夫性, 因此 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为马氏过程。状态空间为 $I = \{1, 2, 3, \dots, N\}$, 参数空间为 $T = \{n \geq 1\}$, 故 $\{X_n, n \geq 1\}$ 为马氏链。根据质点的移动规则, 该过程的转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}_{N \times N}$$

五、 设马尔科夫链 $\{X_n, n \geq 0\}$, $S = \{1, 2, 3\}$, 且

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(1) 求平稳分布 $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}$

(2) 当初始分布 π_0 是怎样分布时, 此马尔科夫链是平稳序列? 并求 EX_n 及 DX_n

参考答案: (1) 因为有限状态的马氏链平稳分布一定存在, 故

$$\pi = \pi P$$

则有

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.2\pi_3 \\ \pi_2 = 0.4\pi_1 + 0.4\pi_2 + 0.3\pi_3 \\ \pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.5\pi_3 \\ \sum_{i=1}^3 \pi_i = 1 \end{cases}$$

求解方程组得

$$\pi = \left(\frac{21}{62}, \frac{23}{62}, \frac{9}{31} \right)$$

所以有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{bmatrix} 21/62 & 23/62 & 9/31 \\ 21/62 & 23/62 & 9/31 \\ 21/62 & 23/62 & 9/31 \end{bmatrix}$$

(2) 当 $\pi_n = \pi_0 P = \left(\frac{21}{62}, \frac{23}{62}, \frac{9}{31} \right)$ 时, 马氏链是平稳序列

对平稳的序列来讲, 有

$$\pi_n = \pi_0 = \left(\frac{21}{62}, \frac{23}{62}, \frac{9}{31} \right)$$

所以

$$EX_n = 1 \times \frac{21}{62} + 2 \times \frac{23}{62} + 3 \times \frac{9}{31} = \frac{121}{62}$$

$$EX_n^2 = 1 \times \frac{21}{62} + 4 \times \frac{23}{62} + 9 \times \frac{9}{31} = \frac{275}{62}$$

$$DX_n = EX_n^2 - (EX_n)^2 = \frac{2409}{3844}$$