

《应用随机过程》第二次作业和参考答案

对外经济贸易大学版本

一、若从 $t = 0$ 开始每隔 $\frac{1}{2}$ 分钟查阅某手机所接收的短信息，令

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{如果 } t \text{ 时手机接收到短信息} \\ 2t, & \text{如果 } t \text{ 时手机未接收到短信息} \end{cases}$$

试求：(1) $X(t)$ 的一维分布函数 $F(\frac{1}{2}; x)$ 、 $F(1; x)$ 。

(2) $X(t)$ 的二维分布函数 $F(\frac{1}{2}, 1; x_1, x_2)$ 。

(3) $X(t)$ 的均值函数 $m_X(t)$ 与 $m_X(1)$ ，方差函数 $\sigma_X^2(t)$ 与 $\sigma_X^2(1)$ 。

参考答案：由题意可知：

$$(1) \cdot X_{1/2} = \begin{cases} 0, & \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \end{cases}, \quad X_1 = \begin{cases} -1, & \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$F\left(\frac{1}{2}; x\right) = P\{X_{1/2} \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

同理可得

$$F(1; x) = P\{X_1 \leq x\} = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

(2) 因为不同时刻是否收到短信是相互独立的，故 $X_{1/2}, X_1$ 的二维分布为

$X(\frac{1}{2}) \backslash X(1)$	-1	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

由此即可写出上述的 $X_{1/2}$ 与 X_1 的二维联合分布函数

$$F\left(\frac{1}{2}, 1; x_1, x_2\right) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x_1 < 1, -1 \leq x_2 < 2 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x_1 < 1, x_2 \geq 2 \text{ 或 } x_1 \geq 1, -1 \leq x_2 < 2 \\ 1, & x_1 \geq 1, x_2 \geq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(1). m_X(t) = \frac{1}{2} \cos \pi t + t$$

且

$$m_X(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

因为 $E[X^2(t)] = \frac{1}{2} \cos^2 \pi t + \frac{1}{2} (2t)^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \pi t + 2t^2$, 所以

$$\begin{aligned} \sigma_X^2(t) &= E[X^2(t)] - m_X^2(t) = \frac{1}{2} \cos^2 \pi t + 2t^2 - \left(\frac{1}{2} \cos \pi t + t\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cos \pi t - t\right)^2 \end{aligned}$$

且

$$\sigma_X^2(1) = \left(\frac{1}{2} \cos \pi - 1\right)^2 = \frac{9}{4}$$

二、设随机过程 $X(t) = Y_1 + Y_2 t$, 其中 Y_1, Y_2 相互独立, 同服从 $N(0,1)$, 试求 $\{X(t)\}$ 的均值函数和协方差函数。

参考答案：根据题意有

$$EY_1 = 0, DY_1 = 1$$

于是

$$EX(t) = E(Y_1 + Y_2 t) = EY_1 + tEY_2 = 0$$

$$\begin{aligned} R(s, t) &= cov(X(s), X(t)) = E\{X(s)X(t)\} = E\{(Y_1 + Y_2 s)(Y_1 + Y_2 t)\} \\ &= E\{Y_1^2 + (s+t)Y_1Y_2 + stY_2^2\} \\ &= EY_1^2 + (s+t)EY_1EY_2 + stEY_2^2 \\ &= 1 + st \end{aligned}$$

三、给定一个随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和任意实数 x , 定义另一个随机过程 $\{Y(t), t \in T\}$, 其中

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x \\ 0, & X(t) > x \end{cases}$$

试证：{Y(t), t ∈ T}的均值函数和自相关函数分别为{X(t), t ∈ T}的一维和二维分布函数.

参考答案：

(1) 过程{Y(t)}的均值函数为：

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= 1 \cdot P\{X(t) \leq x\} + 0 \cdot P\{X(t) > x\} \\ &= P\{X(t) \leq x\} \\ &= F_x(x) \end{aligned}$$

即{Y(t)}的均值函数为 X(t)的一维分布函数。

(2). 过程{Y(t)}的相关函数为

$$\begin{aligned} E[Y(t_1)Y(t_2)] &= 1 \times 1 \times P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} + \\ &\quad 1 \times 0 \times P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) > x_2\} + \\ &\quad 0 \times 1 \times P\{X(t_1) > x_1, X(t_2) \leq x_2\} + \\ &\quad 0 \times 0 \times P\{X(t_1) > x_1, X(t_2) > x_2\} \\ &= P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \\ &= F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

即{Y(t)}的相关函数为 X(t)的二维分布。

四、设有随机过程 $X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$,式中A是服从瑞利分布的随机变量,其分布密度为

$$f(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases}$$

Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布与A相互独立的随机变量, ω 为常数. 问X(t)是否为宽平稳过程?

参考答案： 分析与提示：若 X 与 Y 是两个相互独立的随机变量, 且 f(x) 和 g(y) 是连续函数, 则 f(X) 和 g(Y) 仍是相互独立的随机变量; 再利用宽平稳过程的定义就可判断 X(t) 是否为平稳过程.

由题设随机变量 Θ 与 A 相互独立，于是 $\cos(\omega t + \Theta)$ 与 A 也相互独立，又 $\cos(\omega t + \Theta) \cos(\omega s + \Theta)$ 也相互独立，所以，由期望的性质可得

$$EX(t) = E[A \cos(\omega t + \Theta)] = EA \cdot E \cos(\omega t + \Theta) = 0$$

又因为

$$\begin{aligned} & E \cos(\omega t + \Theta) \cos(\omega s + \Theta) \\ &= E \left[\frac{1}{2} \cos \omega(s - t) + \frac{1}{2} \cos(\omega s + \omega t + 2\Theta) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos \omega(s - t) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cos[\omega(t + s) + 2\Theta] d\Theta \\ &= \frac{1}{2} \cos \omega(s - t) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} EA^2 &= \int_0^\infty \frac{a^3}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) da = \int_0^\infty (-a^2) d\left(\exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\}\right) \\ &= -a^2 \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\} \Big|_0^\infty + 2 \int_0^\infty a \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\} da \\ &= -2\sigma^2 \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\} \Big|_0^\infty = 2\sigma^2 \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} R_X(t, s) &= EA^2 [\cos(\omega t + \Theta) \cos(\omega s + \Theta)] \\ &= \sigma^2 \cos \omega(s - t) \end{aligned}$$

从而由宽平稳过程的定义可知， $X(t)$ 是宽平稳过程。

五、设随机变量 X_1 、 X_2 、 X_3 相互独立且均服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，令 $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3)$ ， $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$ ， $W = \frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3)$ ，试求 (U, V, W) 协方差矩阵 Σ 。

参考答案：因为

$$\begin{aligned} DU &= \frac{1}{3}(DX_1 + DX_2 + DX_3) = \sigma^2 \\ DV &= \frac{1}{2}(DX_1 + DX_2) = \sigma^2 \end{aligned}$$

$$DW = \frac{1}{6}(DX_1 + DX_2 + 4DX_3) = \sigma^2$$

$$EU = \frac{3\mu}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\mu, EV = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mu - \mu) = 0, EW = -\frac{1}{\sqrt{6}}(\mu + \mu - 2\mu) = 0$$

于是

$$\begin{aligned} \text{cov}(U, V) &= E(UV) - EU \cdot EV = \frac{1}{\sqrt{6}}(EX_1^2 + EX_1 \cdot EX_2 + EX_1 \cdot EX_3 - EX_1 \cdot EX_2 \\ &\quad - EX_2^2 - EX_2 \cdot EX_3) = 0 = \text{cov}(V, U) \\ \text{cov}(U, W) &= E(UW) - EU \cdot EW \\ &= -\frac{1}{\sqrt{18}}(EX_1^2 + 2EX_1 \cdot EX_2 + EX_1 \cdot EX_3 + EX_2^2 - EX_2 \cdot EX_3 - 2EX_1 \cdot EX_3 \\ &\quad - 2EX_3^2) = 0 = \text{cov}(W, U) \\ \text{cov}(V, W) &= E(VW) - EV \cdot EW \\ &= -\frac{1}{\sqrt{12}}(EX_1^2 - 2EX_1 \cdot EX_3 - EX_2^2 + 2EX_2 \cdot EX_3) \\ &= 0 = \text{cov}(W, V) \end{aligned}$$

从而

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

七、设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程，试求 $\{X(t)\}$ 的均值函数和协方差函数，并讨论其平稳性。

参考答案：因为 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是维纳过程，故满足：

- (1) $X(t) = 0$;
- (2) $\{X(t), t \geq 0\}$ 有平稳独立增量；
- (3) 对每个 $t > 0$, $X(t)$ 服从正态分布 $N(0, \sigma^2 t)$ ；

于是， $\{X(t), t \geq 0\}$ 的均值函数和协方差函数为：

$$\begin{aligned} EX(t) &= 0, \quad \text{对任意的 } t \geq 0 \\ \gamma(s, t) &= E[X(s)X(t)] = E\{X(s)[X(t) - X(s) + X(s)]\} \\ &= E\{X(s)[X(t) - X(s)]\} + E\{X^2(s)\} \\ &= E[X(s)]E[X(t) - X(s)] + E[X^2(s)] \quad (\text{增量具有独立性}) \\ &= \sigma^2 s = \sigma^2 \min\{s, t\} \end{aligned}$$

由于协方差函数与 s, t 有关, 故维纳过程不是宽平稳的。

八、设随机过程 $X(t) = R \cdot t + C, t \in (0, \infty), C$ 为常数, R 服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布。

(1) 求 $X(t)$ 的一维概率密度和一维分布函数

(2) 求 $X(t)$ 的均值函数、相关函数和协方差函数

参考答案：

[1] 因 R 是 $[0,1]$ 上的均匀分布, C 为常数, 故 $X(t)$ 亦为均匀分布。由 R 的取值范围

知, $X(t)$ 为 $[C, C+t]$ 上的均匀分布, 因此其一维概率密度和一维分布函数分

别为：

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & C \leq x \leq C+t \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$
$$F(X) = \begin{cases} 0, & x < C \\ \frac{x-C}{t}, & C \leq x \leq C+t \\ 1, & x > C+t \end{cases}$$

[2] 根据均值的定义,

$$m_x(t) = E[X] = \int_C^{C+t} x \cdot \frac{1}{t} dx = \frac{t}{2} + C$$

相关函数为：

$$R_X(s, t) = E[X(s)X(t)] = \frac{1}{3}st + \frac{C}{2}(s+t) + C^2$$

协相关函数

$$\gamma_X(s, t) = E[(X(s) - m_x(s))(X(t) - m_x(t))] = \frac{st}{12}$$

九、设 $X(n) = \sin(Un)$, $n \in N$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量。证明：

$X(n)$ 是宽平稳随机过程。

参考答案：由题意得：

$$EX(n) = \int_0^{2\pi} \sin(tn) \frac{1}{2\pi} dt = 0$$

自相关函数

$$\begin{aligned} R_X(n, n + \tau) &= E\{X(n)X(n + \tau)\} = \int_0^{2\pi} \sin(tn) \sin(t(n + \tau)) \frac{1}{2\pi} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t\tau) + \cos(t(2n + \tau)) \frac{1}{2\pi} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(t\tau) \frac{1}{2\pi} dt = \sin(2\pi\tau) / 2\pi\tau = 0 \end{aligned}$$

均值函数为常数，自相关函数只与 τ 有关，所以是平稳随机过程。

十、已知随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 和协方差函数 $\gamma_X(t_1, t_2)$ ，设 $\varphi(t)$ 是一个非随机的函数，试求随机过程 $\{Y(t) = X(t) + \varphi(t)\}$ 的均值函数和协方差函数。

参考答案：过程 $\{Y(t)\}$ 的均值函数为：

$$E[Y(t)] = E[X(t) + \varphi(t)] = \mu_X(t) + \varphi(t)$$

过程 $\{Y(t)\}$ 的协方差函数为：

$$\gamma_Y(s, t)$$

$$= E[Y(s)Y(t) - E(Y(s))E(Y(t))]$$

$$= E[(X(s) + \varphi(s))(X(t) + \varphi(t)) - (\mu_X(s) + \varphi(s))(\mu_X(t) + \varphi(t))]$$

$$= E[X(s)X(t) - \mu_X(s)\mu_X(t)] = \gamma_X(s, t)$$