

《应用随机过程》第二次作业

对外经济贸易大学版本

题目一、

若从 $t = 0$ 开始每隔 $\frac{1}{2}$ 分钟查阅某手机所接收的短信息，令

$$X(t) = \begin{cases} \cos \pi t, & \text{如果 } t \text{ 时手机接收到短信息} \\ 2t, & \text{如果 } t \text{ 时手机未接收到短信息} \end{cases}$$

试求：(1) $X(t)$ 的一维分布函数 $F(\frac{1}{2}; x)$ 、 $F(1; x)$ 。

(2) $X(t)$ 的二维分布函数 $F(\frac{1}{2}, 1; x_1, x_2)$ 。

(3) $X(t)$ 的均值函数 $m_X(t)$ 与 $m_X(1)$ ，方差函数 $\sigma_X^2(t)$ 与 $\sigma_X^2(1)$ 。

题目二、

设随机过程 $X(t) = Y_1 + Y_2 t$ ，其中 Y_1, Y_2 相互独立，同服从 $N(0, 1)$ ，试求 $\{X(t)\}$ 的均值函数和协方差函数。

题目三、

给定一个随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 和任意实数 x ，定义另一个随机过程 $\{Y(t), t \in T\}$ ，其中

$$Y(t) = \begin{cases} 1, & X(t) \leq x \\ 0, & X(t) > x \end{cases}$$

试证 $\{Y(t), t \in T\}$ 的均值函数和自相关函数分别为 $\{X(t), t \in T\}$ 的一维和二维分布函数。

题目四、

设有随机过程 $X(t) = A \cos(\omega t + \Theta)$ ，式中 A 是服从瑞利分布的随机变量，其分布密度为

$$f(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases}$$

Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布与 A 相互独立的随机变量； ω 为常数。问 $X(t)$ 是否为宽平稳过程？

题目五、

设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立且均服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 令 $U = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3)$, $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)$, $W = \frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3)$, 试求 (U, V, W) 协方差矩阵 Σ .

题目六、

设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 都不是平稳的, 且 $X(t) = A(t) \cos t$, $Y(t) = B(t) \sin t$, 其中 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是均值为零的相互独立的平稳过程, 它们有相同的相关函数, 求证 $Z(t) = X(t) + Y(t)$ 是平稳过程.

题目七、

设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个维纳过程, 试求 $\{X(t)\}$ 的均值函数和协方差函数, 并讨论其平稳性.

题目八、

设随机过程 $X(t) = R \cdot t + C, t \in (0, \infty)$, C 为常数, R 服从 $[0, 1]$ 区间上的均匀分布.

- (1) 求 $X(t)$ 的一维概率密度和一维分布函数
- (2) 求 $X(t)$ 的均值函数、相关函数和协方差函数

题目九、

设 $X(n) = \sin(Un), n \in N$, 这里 U 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量. 证明:

$X(n)$ 是宽平稳随机过程.

题目十、

已知随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的均值函数 $\mu_X(t)$ 和协方差函数 $\gamma_X(t_1, t_2)$, 设 $\varphi(t)$ 是一个非随机的函数, 试求随机过程 $\{Y(t) = X(t) + \varphi(t)\}$ 的均值函数和协方差函数.