



应用随机过程

吴卫星， 邓军

对外经济贸易大学

金融学院

1/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第五章: Poisson过程

- 3.1 Poisson过程
- 3.2 与Poisson过程相联系的若干分布
- 3.3 Poisson过程的推广

2/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



泊松过程（一）

一、计算过程与泊松过程

在天文，地理，物理，生物，通信，医学，计算机网络，密码学等许多领域，都有关于随机事件流的计数问题，如：

- 盖格计数器上的粒子流；
- 计算机网络上的（图象，声音）流；
- 编码（密码）中的误码流；
- 交通中事故流；
- 细胞中染色体的交换次数，...
- 均构成以时间顺序出现的事件流 $A_1, A_2, \dots$

定义 5.0.1 随机过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 称为计数过程(Counting process), 如果 $N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内事件 A 出现的总次数.

计数过程应满足：

3/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



- (1) $N(t) \geq 0$;
- (2) $N(t)$ 取非负整数值;
- (3) 如果 $s < t$, 则 $N(s) \leq N(t)$;
- (4) 对于 $s < t$, $N(t) - N(s)$ 表示时间间隔 $(s, t]$ 内事件出现的次数.

一类很重要的计数过程是Poisson过程.

4/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



Poisson过程数学模型

电话呼叫过程：设 $N(t)$ 为 $[0, t)$ 时间内到达的呼叫次数，其状态空间为

$$E = \{0, 1, 2, \dots\}$$

此过程有如下特点：

- 1) 零初值性： $N(0) = 0$;
- 2) 独立增量性： 任意两个不相重叠的时间间隔内到达的呼叫次数相互独立；
- 3) 齐次性： 在 (s, t) 时间内到达的呼叫次数仅与时间间隔长度 $t - s$ 有关，而与起始时间 s 无关；
- 4) 普通性： 在充分小的时间间隔内到达的呼叫次数最多

5/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



仅有一次，即对充分小的 Δt ,有

$$P\{N(\Delta t) = 0\} = P_0(\Delta t) = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{N(\Delta t) = 1\} = P_1(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{N(\Delta t) \geq 2\} = \sum_{k=2}^{\infty} P_k(\Delta t) = o(\Delta t),$$

其中 $\lambda > 0$.

例 5.0.2 (Poisson过程在排队论中的应用) 在随机服务系统中排队现象的研究中，经常用到Poisson 过程模型，例如,到达电话总机的呼叫数目，到达某服务设施的顾客数，都可以用Poisson过程来描述，以某火车站售票处为例，设从早上8:00开始，此售票处连续售票，乘客依10人/小时的平均速率到达，则从9:00到10:00这1小时内最多有5名乘客来此购票的概率是多少？从10:00-11:00没有人来买票的

6/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



概率是多少？

我们用一个Poisson过程来描述. 设8:00为0时刻, 则9:00为1时刻, 参数 $\lambda = 10$. 由Poisson过程的平稳性知

$$P(N(2) - N(1) \leq 5) = \sum_{n=0}^5 e^{-10 \cdot 1} \frac{(10 \cdot 1)^n}{n!},$$

$$P(N(3) - N(2) = 0) = e^{-10} \cdot \frac{(10)^0}{0!} = e^{-10}.$$

例 5.0.3 (事故发生次数与保险公司接到的索赔数)

若以 $N(t)$ 表示某场所在 $(0, t]$ 时间内发生不幸事故的数目, 则 Poisson过程就是 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的一种很好近似. 例如, 保险公司接到赔偿请求的次数 (设一次事故就导致一次索赔) 都是可以应用Poisson过程的模型. 我们考虑一种最简单情况, 设保险公司每次的赔付都是1, 每月平均接到索赔要求4次, 则一年中它要付出的金额平均为多少?

7/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



设一年开始为0时刻, 1月末为时刻1, 2月末为时刻2, ..., 则年末为时刻12

$$P(N(12) - N(0) = n) = \frac{(4 \times 12)^n}{n!} e^{-4 \times 12}.$$

均值

$$E[N(12) - N(0)] = 4 \times 12 = 48.$$

为什么实际中有这么多的现象可以用Poisson过程来反映呢? 其根据是小概率事件原理. 我们在概率论的学习中已经知道, Bernoulli试验中, 每次试验成功的概率很小而试验的次数很多时, 二项分布会逼近Poisson分布. 这一想法很自然地推广到随机过程情况. 比如上面提到的事故发生的例子, 在很短的时间内发生事故的概率是很小的, 但假如考虑很多个这样很短的时间的连接, 事故的发生将会有有一个大致稳定的速率, 这很类似于Bernoulli试验以及二项分布逼

8/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



近Poisson分布时的假定.

定义 5.0.4 设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) N(0) = 0; \\ (2) \text{是平稳独立增量过程;} \\ (3) P\{N(\Delta t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \lambda > 0; \\ (4) P\{N(\Delta t) \geq 2\} = o(\Delta t). \end{array} \right.$$

称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数(或速率,强度)为 λ 的齐次泊松过程.

注 1 事实上, 把 $[0, t]$ 划分为 n 个相等的时间区间, 则由条件(4)'可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在每个小区间内事件发生两次或两次以上的概率趋于0, 因此, 事件发生一次的概率 $p \approx \lambda \frac{t}{n}$ (显然 p 会很小), 事件不发生的概率为 $1-p \approx 1-\lambda \frac{t}{n}$, 这恰好是一次Bernoulli 试验. 其中事件发生一次即为试验



成功，不发生即为失败，再由条件(2)'给出的平稳独立增量性， $N(t)$ 就相当于 n 次独立Bernoulli 试验中试验成功的总次数，由Poisson 分布的二项分布逼近可知 $N(t)$ 将服从参数为 λt 的Poisson分布.

定理 5.0.5 齐次泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 在时间间隔 $(t_0, t_0 + t)$ 内事件出现 n 次的概率为:

$$P\{[N(t_0 + t) - N(t_0)] = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, (n = 0, 1, 2, \dots)$$

证明:

$$\begin{aligned} P_n(t) &= P\{N(t) = n\} = P\{[N(t) - N(0)] = n\} \\ &= P\{N(t_0 + t) - N(t_0) = n\} \quad (1) \end{aligned}$$

10/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



由条件(2)~(4),得:

$$\begin{aligned}P_0(t+h) &= P\{N(t+h) = 0\} = P\{N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0\} \\&= P\{N(t) = 0\}P\{N(t+h) - N(t) = 0\} \\&= P_0(t)[1 - \lambda h + o(h)] \\&\rightarrow \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}\end{aligned}$$

$$\text{令 } h \rightarrow 0, \text{得} \begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -P_0(t)\lambda \\ P_0(0) = 1, \end{cases} \quad \text{条件 (1) } N(0) = 0.$$

解得 $P_0(t) = e^{-\lambda t}, t \geq 0$.

2. 当 $n \geq 1$, 根据全概率公式有

$$\begin{aligned}P_n(t+h) &= P_n(t)P_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h) + o(h) \\P_n(t+h) &= (1 - \lambda h)P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h) \\&\rightarrow \frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}\end{aligned}$$



令 $h \rightarrow 0$, 得 $\frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$

两边同乘以 $e^{\lambda t}$ 后移项整理得

$$\frac{d[e^{\lambda t} P_n(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t), \quad (2)$$

当 $n = 1$, 则

$$\begin{cases} \frac{d[e^{\lambda t} P_1(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t} P_0(t) = \lambda e^{\lambda t} e^{-\lambda t} = \lambda \\ P_1(0) = 0 \end{cases}$$

解得

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

假设 $P_{n-1}(t) = \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$ 成立. 带入 (2) 式有

$$\frac{d[e^{\lambda t} P_n(t)]}{dt} = \lambda e^{\lambda t} P_{n-1}(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\rightarrow e^{\lambda t} P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{(n)!} + c$$



利用初始条件 $P_n(0) = 0$, 可证得

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{(n)!} e^{-\lambda t}$$

对一切 $n \geq 0$ 均成立。

定理证明反之亦然，得泊松过程的等价定义：

13/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定义 5.0.6 设计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 满足下述条件:

- (1) $N(0) = 0$;
- (2) $N(t)$ 是独立增量过程;
- (3) 对一切 $0 \leq s < t$, $N(t) - N(s) \sim P(\lambda(t-s))$, 即

$$P\{[N(t) - N(s)] = k\} = \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$$
$$(k = 0, 1, 2, \dots)$$

注: 特别有

$$P\{N(t) = k\} = P\{[N(t) - N(0)] = k\}$$
$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

例 5.0.7 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程, 事件 A 在 $(0, \tau]$ 时间区间内出现 n 次, 试求:

$$P\{N(s) = k | N(\tau) = n\}, 0 < k < n, 0 < s < \tau$$

解:

$$\begin{aligned} P\{N(s) = k | N(\tau) = n\} &= \frac{P\{N(s) = k, N(\tau) = n\}}{P\{N(\tau) = n\}} \\ &= P\{N(s) = k, N(\tau) - N(s) = n - k\} n! e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^{-n} \\ &= e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda(\tau-s)} \frac{[\lambda(\tau-s)]^{n-k}}{(n-k)!} n! e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^{-n} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{s}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{s}{\tau}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{s}{\tau}\right)^k \left(1 - \frac{s}{\tau}\right)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

例 5.0.8 事件 A 的发生形成强度为 λ 的Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$. 如果每次事件发生时以概率 p 能够被记录下来, 并以 $M(t)$ 表示到 t 时刻被记录下来的事件总数, 则 $\{M(t), t \geq 0\}$ 是一个强度为 λp 的Poisson过程.

事实上, 由于每次事件发生时, 对它的记录和不记





录都与其他的事件能否被记录独立，而且事件发生服从Poisson分布. 所以 $M(t)$ 也是具有平稳独立增量的，故只需验证 $M(t)$ 服从均值为 λpt 的Poisson分布. 即对 $t > 0$ ，有

$$P(M(t) = m) = \frac{(\lambda pt)^m}{m!} e^{-\lambda pt}.$$

16/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit

由于

$$\begin{aligned} & P(M(t) = m) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(M(t) = m | N(t) = m + n) \cdot P(N(t) = m + n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{m+n}^m p^m (1-p)^n \cdot \frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda p t)^m (\lambda(1-p)t)^n}{m! n!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{\lambda(1-p)t} = e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!}. \end{aligned}$$



17/100

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



例 5.0.9 若每条蚕的产卵数服从Poisson分布，强度为 λ ，而每个卵变为成虫的概率为 p ，且个卵是否变为成虫彼此间没有关系，求每条蚕养活 k 只小蚕的概率。

解 由上例我们立即知道小蚕数服从强度为 λp 的Poisson分布，故所求概率为

$$\frac{(\lambda p t)^k}{k!} e^{-\lambda p t}$$

18/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



二、齐次泊松过程的几个结论

1. 数字特征

- 因对 $\forall t > 0, N(t) \sim P(\lambda t)$
- 均值函数 $m(t) = E\{N(t)\} = \lambda t$
- 方差函数 $D(t) = \lambda t$
- 有 $\lambda = \frac{E\{N(t)\}}{t}$, λ 是单位时间内事件出现的平均次数。
- 协方差函数 $C(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st$.

证： 因泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程，不妨设 $t > s > 0$

$$\begin{aligned} R(s, t) &= E\{N(t)N(s)\} = E\{N(s)[N(t) - N(s) + N(s)]\} \\ &= E\{N(s)[N(t) - N(s)]\} + E[N^2(s)] \\ &= E\{N(s)\}E\{N(t) - N(s)\} + E[N^2(s)] \\ &= \lambda s \times \lambda(t - s) + [\lambda s + (\lambda s)^2] = \lambda s + \lambda^2 st \end{aligned}$$

19/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



20/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit

$$C(s, t) = R(s, t) - m(s)m(t) = \lambda s + \lambda^2 st - \lambda s \cdot \lambda t$$

一般的有

$$C(s, t) = \lambda \min(s, t)$$

$$R(s, t) = \lambda \min(s, t) + \lambda^2 st.$$

例 5.0.10 设 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别是强度为 λ_1 和 λ_2 的相互独立的泊松过程,

1) 令 $X(t) = N_1(t) - N_2(t), t > 0$, 求 $X(t)$ 的均值函数和相关函数。

2) 证明 $X(t) = N_1(t) + N_2(t), t > 0$ 是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。

3) 证明 $X(t) = N_1(t) - N_2(t), t > 0$, 不是泊松过程。



解: 1) $m_X(t) = E[N_1(t)] - E[N_2(t)] = (\lambda_1 - \lambda_2)t$

$$\begin{aligned} R_X(s, t) &= E\{[N_1(1) - N_2(s)][N_1(t) - N_2(t)]\} \\ &= E[N_1(s)N_1(t)] + E[N_2(s)N_2(t)] - E[N_1(s)N_2(t)] - E[N_2(s)N_1(t)] \\ &= R_{N_1}(s, t) + R_{N_2}(s, t) - E[N_1(s)]E[N_2(t)] - E[N_2(s)]E[N_1(t)] \\ &= \lambda_1 \min(s, t) + \lambda_1^2 st + \lambda_2 \min(s, t) + \lambda_2^2 st - 2\lambda_1 \lambda_2 st \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2) \min(s, t) + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)st - 2\lambda_1 \lambda_2 st. \end{aligned}$$

2) 根据泊松分布的可加性知

$$X(t) = N_1(t) + N_2(t), t > 0,$$

是强度为 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的泊松过程。

3) $X(t) = N_1(t) - N_2(t)$ 特征函数为

$$\varphi_X(u) = \exp\{\lambda_1 t e^{iu} + \lambda_1 t e^{-iu} - (\lambda_1 + \lambda_2)t\}$$

由分布函数与特征函数的一一对应的唯一性定理知 $X(t)$ 不是泊松过程。



22/100



GoBack

FullScreen

Close

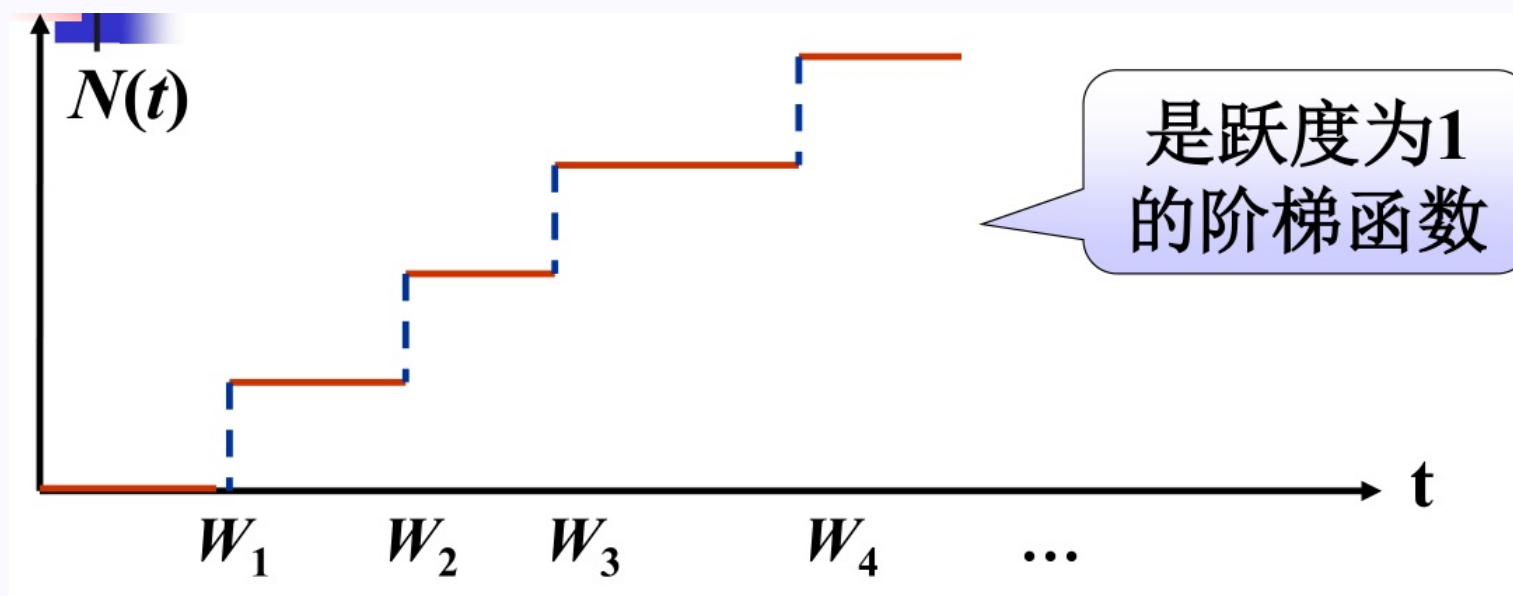
Quit

2. 时间间隔与等待时间的分布

用 T_n 表示事件 A 第 $n-1$ 次出现与第 n 次出现的时间间隔。

记 $W_n = \sum_{i=1}^n T_i$, 则 $T_i = W_{i+1} - W_i$

称 W_n 为事件 A 第 n 次出现的等待时间（到达时间）。





定理 5.0.11 设 $\{T_n, n \geq 1\}$ 是参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 的时间间隔序列, 则 $\{T_n, n \geq 1\}$ 相互独立同服从指数分布, 且 $E\{T\} = 1/\lambda$

证: (1) 因 $\{T_1 > t\} = \{(0, t)\text{内事件A不出现}\}$

$$\rightarrow P\{T_1 > t\} = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

$$\rightarrow F_{T_1}(t) = 1 - P\{T > t\} = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

即 T_1 服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

(2) 由泊松过程的平稳独立增量性, 有 $P\{T_2 > t | T_1 = s\} = P\{\text{在}(s, t + s)\text{内事件A不出现} | T_1 = s\}$

$$= P\{N(t + s) - N(s) = 0\}$$

$$= P\{N(t) - N(0) = 0\}$$

$$= P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$



故 T_2 与 T_1 相互独立, 且 T_2 也服从均值为 $1/\lambda$ 的指数分布。

(3) 对于一般 $n > 1$ 和 $t > 0$, 以及 $r_1, r_2, \dots, r_{n-1} > 0$, 有

$$P\{T_n > t | T_i = r_i, 1 \leq i \leq n-1\}$$

$$= P\{N(t + r_1 + \dots + r_{n-1}) - N(r_1 + r_2 + \dots + r_{n-1}) = 0\}$$

$$= P\{N(t) - N(0) = 0\} = e^{-\lambda t}.$$

$$\text{即 } F_n(t) = P\{T_n \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

注 2 定理??的结果应该是预料之中的, 由于Poisson过程有平稳独立增量, 过程在任何时刻都“重新开始”换言之这恰好就是“无记忆”的体现, 与指数分布的“无记忆性”是对应的.

例 5.0.12 假定某天文台观测到的流星流是一个Poisson过程, 根据以往资料统计为每小时平均观察到3颗流星.试求:



在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率.

解 设早晨8时为0时刻，以 $N(t)$ 表示0时到 t 时观测到的流星数，则 $\{N(t)\}$ 是强度为3的Poisson过程，则有

$$N(4) - N(0) \sim P(3 \times 4)$$

故在上午8点到12点期间，该天文台没有观察到流星的概率为

$$P\{N(4) - N(0) = 0\} = e^{-12}$$

定理 5.0.13 参数为 λ 的泊松过程 $\{N(t), t \geq 0\}$, 事件 A 第 n 次出现的等待时间服从 Γ 分布，其概率密度为：

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

注：在排队论中称 W_n 服从爱尔郎分布。



证： 因 W_n 是事件A第n次出现的等待时间， 故

$$\{W_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\} = \{(0, t) \text{内A至少出现} n \text{次}\}$$

$$F_{W_n}(t) = P\{W_n \leq t\} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

$$\begin{aligned} f_{W_n}(t) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \\ &= \lambda e^{(-\lambda t)} \frac{(\lambda t)^{(n-1)}}{(n-1)!}, t \geq 0. \end{aligned}$$

27/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



3. 到达时间的条件分布

定理 5.0.14 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是Poisson过程, 已知在 $(0, t]$ 时间内A出现 n 次, 这 n 次到达时间 $W_1, W_2, \dots, W_n$ 的联合条件分布密度为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n | N(t) = n) = \begin{cases} \frac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < \dots < t_n; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

Proof 我们证明 $n = 1$ 的情况。

$$P(W_1 \leq t_1 | N_t = 1) = P(W_1 \leq t_1, N_t = 1) / P(N_t = 1).$$

$$\begin{aligned} P(W_1 \leq t_1, N_t = 1) &= P(T_1 \leq t_1, T_1 + T_2 > t) \\ &= \int_0^{t_1} \lambda e^{-\lambda x} dx \int_{t-x}^{\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = t_1 \lambda e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

因此, $P(W_1 \leq t_1 | N_t = 1) = t_1/t$.

28/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



泊松过程（二）

三、更新计数过程

定义 5.0.15 定义：设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个计数过程，如果它的时间间隔序列 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 相互独立同分布，称为更新计数过程.

例 5.0.16 同类型设备的更新，如一个元件；一个灯泡；一个系统…假定每个更换对象的寿命具有相同的概率密度，则相继两次损坏之间的更新时间 $T_1, T_2, \dots$ 相互独立同分布.

定理 5.0.17 更新计数过程 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程的充要条件是时间间隔 T 具有指数分布.

29/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



注：等价于时间间隔序列 $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ 相互独立同服从相同指数分布.

证明方法一： 我们用Poisson过程的定义??来证明。

$$P(N(\Delta t) = 0) = P(T_1 > \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} \sim 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\begin{aligned} P(N(\Delta t) = 1) &= P(T_1 < \Delta t, T_1 + T_2 > \Delta t) \\ &= \lambda^2 \int_0^{\Delta t} \int_{\Delta t - t_1}^{+\infty} e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda t_2} dt_1 dt_2 \\ &= \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} \sim \lambda \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

30/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



证明方法2（了解）： 由定理知必要性, 仅需证充分性, 应有

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, (k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0)$$

T_i 的特征函数为

$$\varphi_{T_i}(\theta) = \varphi_T(u) = \frac{1}{1 - \frac{iu}{\lambda}}, (i = 1, 2, \dots)$$

等待时间

$$W_k = \sum_{i=1}^k T_i,$$

且 $T_1, T_2, \dots, T_k$ 相互独立, 故

$$\varphi_{W_k}(u) = [\varphi_T(u)]^k = \frac{1}{[1 - \frac{iu}{\lambda}]^k}, (k = 1, 2, \dots)$$

由特征函数的反演公式及唯一性定理知, W_k 的密度函数为



$$f_{w_k}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

积分可得

$$F_{w_k}(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

因

$$\{W_k < t\} = \{N(t) \geq k, t \geq 0\}$$

故

$$\begin{aligned} P\{N(t) = k\} &= P\{N(t) \geq k\} - P\{N(t) \geq k+1\} \\ &= F_{w_k}(t) - F_{w_{k+1}}(t) \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, (k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0) \end{aligned}$$

32/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$\{N(t), t \geq 0\}$ 的概率分布为泊松分布,即 $N(t) \sim P(\lambda t)$.

一般地, 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 为更新计数过程,有:

- 1) 等待时间 $W_k = \sum_{i=1}^k T_i$ 的特征函数为,

$$\varphi_{W_k}(u) = [\varphi_T(u)]^k$$

- 2) 因 $\{W_k < t\} = \{N(t) \geq k\}$,有

$$F_{W_k}(t) = 1 - F_{N(t)}(k)$$

- 3)

$$\begin{aligned} m(t) &= E[N(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{N(t) = k\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k [F_{w_k}(t) - F_{w_{k+1}}(t)] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} F_{w_k}(t) \end{aligned}$$



问题： 如何模拟一个参数为 λ 的Poisson过程 $\{N(t), t \geq 0\}$???

提示：

- 1. 结合定理，并查找相关资料.
- 2. 给出算法步骤，并说明算法原理.

34/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



例 5.0.18 设到达电影院的观众组成强度为 λ 的Poisson流, 如果电影从 t 时刻开演, 计算 $(0, t]$ 内到达电影院的观众等待时间总和的数学期望.

解: 设 W_k 是第 k 名观众到达时刻, 在 $(0, t]$ 内到达的观众数为 $N(t)$, 则总等待时间为

$$\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k)$$

根据全数学期望公式

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k)\right] = E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k) \mid N(t)\right]\right\}$$



对 $\forall n \geq 1$,

$$E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k) | N(t) = n\right] = nt - E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k | N(t) = n\right]$$

由定理知 $W_1, W_2, \dots, W_n$ 与 $[0, t]$ 上均匀分布相互独立随机变量的顺序统计量 $U_{(1)}, U_{(2)}, \dots, U_{(n)}$ 有相同分布.

$$\begin{aligned} & E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} W_k | N(t) = n\right] \\ &= E\left(\sum_{k=1}^n U_{(k)}\right) = \sum_{k=1}^n E(U_{(k)}) = \frac{nt}{2} \\ \Rightarrow & E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k) | N(t) = n\right] = nt - \frac{nt}{2} = \frac{nt}{2} \end{aligned}$$

36/100

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$\Rightarrow E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k) | N(t)\right] = \frac{t}{2} N(t)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k)\right] &= E\left\{E\left[\sum_{k=1}^{N(t)} (t - W_k) | N(t)\right]\right\} \\ &= E\left[\frac{1}{2} N(t)\right] = \frac{\lambda t^2}{2} \end{aligned}$$

37/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



四、复合泊松过程

例 5.0.19 调查城市人员流动情况,可在关键路口观察公交车的载客情况, 设 $(0, t)$ 内通过的公交车数 $N(t)$ 是一个poisson过程, 而每辆车的载客人数为 ξ_n , 则经公交车通过此路口的人数为:

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n$$

例 5.0.20 若将股票交易次数 $N(t)$ 看作一个poisson过程, ξ_n 表示第 n 次与第 $n-1$ 次易手前后股票价格差, 则 $X(t)$ 就代表直到 t 时刻股票的价格变化.

定义 5.0.21 定义: 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的齐次poisson过程, $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 是相互独立同分布的随机变量序列, 并与 $N(t)$ 相互独立, 称

38/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit

$$X(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n$$

为复合poisson过程..



39/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定理 5.0.22 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是复合泊松过程

$$X_t = \sum_{n=1}^{N(t)} \xi_n, t \geq 0$$

其中 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度为 λ 的泊松过程, $\xi_n, n = 1, 2, \dots$ 相互独立与 ξ 同分布, 有:

- 1) ξ 的特征函数为 $\varphi_\xi(u)$, 则 $X(t)$ 的特征函数为

$$\varphi_{X_t}(u) = e^{\lambda t [\varphi_\xi(u) - 1]}, t \geq 0$$

- 2) 均值函数

$$m_X(t) = E[X(t)] = E[N(t)]E(\xi) = \lambda t E(\xi)$$

- 3) 方差函数

$$D_x(t) = E(N)E(\xi) = \lambda t E(\xi^2).$$

40/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



证明见 P_{92} .

例 5.0.23 设顾客以每分钟6人的平均速率进入某商场, 这一过程可以用Poisson过程来描述. 又设进入该商场的每位顾客买东西的概率为0.9, 且每位顾客是否买东西互不影响, 也与进入该商场的顾客数无关, 求一天(12小时)在该商场买东西的顾客数的分布与均值.

解 以 $N_1(t)$ 表示在时间 $(0, t]$ 内进入该商场的顾客数, 则 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda = 6$ (人/分钟)的Poisson过程. 再以 $N_2(t)$ 表示在时间 $(0, t]$ 内在该商场买东西的顾客数, 并设

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{如果第} i \text{位顾客在该商场买东西} \\ 0, & \text{如果第} i \text{位顾客在该商场未买东西} \end{cases}$$

41/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



则 Y_i 独立同分布于 $B(1, 0.9)$, 与 $\{N_1(t), t \geq 0\}$ 独立, 且

$$N_2(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Y_i$$

易知

$$N_2(t) \sim P(5.4t)$$

即 $\{N_2(t), t \geq 0\}$ 是速率为 $\lambda = 5.4$ (人/分钟) 的Poisson过程, $t = 12$ 小时 = 720 分钟, 则

$$N_2(720) \sim P(3888)$$

即一天(12小时)在该商场买东西的平均顾客数为 $E[N_2(720)] = 3888$ 人.

注: 若以 Z_i 表示进入该商场的第 i 位顾客在该商场所花

42/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



的钱数(单位:元), 且有 $Z_i \sim B(200, 0.5)$, 则

$$N_3(t) = \sum_{i=1}^{N_1(t)} Z_i$$

示在时间 $(0, t]$ 内该商场的营业额, 则该商场一天的平均营业额为

$$E[N_3] = E[Z_1]E[N_1] = (200 \times 0.5) \times (6 \times 12 \times 60) = 432000 \text{元}$$

43/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



五、非齐次泊松过程(了解内容, 不考察)

当Poisson过程的强度 λ 不再是常数, 而与时间 t 有关时, Poisson过程被推广为非齐次Poisson过程. 一般来说, 非齐次Poisson过程是不具备平稳增量的. 在实际中, 非齐次Poisson过程也是比较常用的. 例如在考虑设备的故障率时, 由于设备使用年限的变化, 出故障的可能性会随之变化; 放射性物质的衰变速度, 会因各种外部条件的变化而随之不同; 昆虫产卵的平均数量随年龄和季节而变化等. 在这样的情况下, 再用齐次Poisson过程来描述就不合适了, 于是改用非齐次的Poisson过程来处理.

定义 5.0.24 如果计数过程满足下列条件:

- 1. $N(0) = 0$;
- 2. $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个独立增量过程;

44/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit



- 3. $P\{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda(t) \Delta t + o(\Delta t);$
- 4. $P\{N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t);$

称 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是具有速率函数为 $\lambda(t)$ 的非齐次poisson过程.

定理 5.0.25 若 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是非齐次泊松过程, 且达到率 $\lambda(t)$ 是连续函数, 则在 $[t_0, t_0 + t]$ 时间内事件 A 出现 k 次的概率为

$$\begin{aligned} & P\{[N(t_0 + t) - N(t_0)] = k\} \\ &= \frac{[m(t_0 + t) - m(t_0)]^k}{k!} \exp\{-[m(t_0 + t) - m(t_0)]\}, \end{aligned}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \dots$, $m(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$.

45/100



GoBack

FullScreen

Close

Quit