



应用随机过程

吴卫星， 邓军

对外经济贸易大学

金融学院

1/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第8章 随机积分

- 8.1 关于随机游动的积分
- 8.2 关于Brown运动的积分
- 8.3 Itô积分过程
- 8.4 Itô公式
- 8.5 随机微分方程
- 8.5 Black-Scholes模型

2/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



本章的目的是引入关于Brown运动的积分，讨论其性质并给出在随机分析及金融学中有着重要应用的Itô公式.

§8.1 关于随机游动的积分

我们从讨论关于简单的随机游动的积分开始. 设 $X_1, X_2, \dots$ 是独立的随机变量, $P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$, 令 S_n 表示相应的游动

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

3/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



我们可以这样看这组独立随机变量, X_n 为第 n 次公平赌博的结果 ($X_n = 1$ 为赢1元, $X_n = -1$ 为输掉1元). $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ (由 $\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ 生成的 σ 代数), 也可以理解为包含 $X_1, \dots, X_n$ 的信息. 令 B_n 是 $\mathcal{F}_{n-1}$ 可测的随机变量序列, 比如它表示第 n 次赌博时所下赌注, 则它只能利用第 $n-1$ 次及以前的信息, 而不能利用第 n 次赌博的结果. 于是到时刻 n 的收益 Z_n 为

$$Z_n = \sum_{i=1}^n B_i X_i = \sum_{i=1}^n B_i (S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^n B_i \Delta S_i$$

这里 $\Delta S_i = S_i - S_{i-1}$, $S_0 = 0$. 我们称 Z_n 为 B_n 关于 S_n 的积分.



容易看出 $\{Z_n\}$ 是关于 $\mathcal{F}_n$ 的鞅，即对于所有的 n

$$E[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Z_n$$

特别地， $E[Z_n] = 0$ 。此外，如果假定 $E[B_n^2] < \infty$ ，则

$$Var[Z_n] = E[Z_n^2] = \sum_{i=1}^n E[B_i^2]$$

事实上，

$$Z_n^2 = \sum_{i=1}^n B_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} B_i B_j X_i X_j$$

再注意到 $X_i^2 = 1$ ，如果 $i < j$ ，则 B_i, X_i, B_j 都是 $\mathcal{F}_{j-1}$ 可测的，且 X_j 独立于 $\mathcal{F}_{j-1}$ ，得

$$E[B_i B_j X_i X_j] = E[E[B_i B_j X_i X_j | \mathcal{F}_{j-1}]] = E[B_i B_j X_i E(X_j)] = 0$$



§8.2 关于Brown运动的积分

本节定义关于Brown运动的积分 $\int_0^T X(t)dB(t)$ (或简记为 $\int XdB$), 这里 $\{B(t)\}$ 是一维标准Brown运动, 有时也记为 $\{W_t\}$. 首先考虑一个非随机的简单过程 $\{X(t)\}$, 即 $X(t)$ 是一个简单函数 (不依赖于 $B(t)$). 由简单函数的定义, 存在 $[0, T]$ 的分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ 及常数 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$, 使得

$$X(t) = \begin{cases} c_0, & \text{如果 } t = 0 \\ c_i, & \text{如果 } t_i < t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

或表示为

$$X(t) = c_0 I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (8.2.1)$$

于是，可定义其积分为

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i [B(t_{i+1}) - B(t_i)] \quad (8.2.2)$$

由Brown运动的独立增量性可知，公式(8.2.2)所定义的积分是Gauss分布的随机变量，其均值为0，方差为



7/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\int X dB\right) &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \right]^2 \\ &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j [B(t_{i+1}) - B(t_i)][B(t_{j+1}) - B(t_j)] \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c_i c_j E[(B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i^2 (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$



用取极限的方法可以将这一定义推广到一般的非随机函数 $X(t)$. 但是我们要定义的是随机过程的积分, 因此将简单函数中的常数 c_i 用随机变量 ξ_i 来代替, 并要求 ξ_i 是 $\mathcal{F}_{t_i}$ 可测的. 这里 $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(u), 0 \leq u \leq t\}$. 于是, 由Brown运动的鞅性质得

$$E[\xi_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)) | \mathcal{F}_{t_i}] = \xi_i E[B(t_{i+1}) - B(t_i) | \mathcal{F}_{t_i}] = 0$$

因此

$$E[\xi_i(B(t_{i+1}) - B(t_i))] = 0.$$



定义 8.2.1 设 $\{X(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是一个简单随机过程, 即存在 $[0, T]$ 的分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$, 随机变量 $\xi_{-1}, \xi_0, \cdots, \xi_{n-1}$ 使得 ξ_{-1} 是常数, ξ_i 依赖于 $\{B(t), t \leq t_i\}$, 但不依赖于 $\{B(t), t > t_i\}$, 并且

$$X(t) = \xi_{-1}I_0(t) + \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i I_{(t_i, t_{i+1}]}(t) \quad (8.2.3)$$

此时, **Itô**积分 $\int_0^T X dB$ 定义为

$$\int_0^T X(t) dB(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \quad (8.2.4)$$

10/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit

简单过程的积分是一个随机变量, 满足下述性质.

(1) **线性** 如果 $X(t), Y(t)$ 是简单过程, 则

$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dB(t) = \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t)$$

这里 α, β 是常数.

(2)

$$\int_0^T I_{[a,b]}(t) dB(t) = B(b \wedge T) - B(a \vee 0)$$

其中 $I_{[a,b]}(t)$ 是区间 $[a, b]$ 的示性函数, $b \wedge T := \min(b, T)$, $a \vee 0 := \max(a, 0)$.

(3) **零均值性** 如果 $E[\xi_i] < \infty, (i = 0, 1, \dots, n-1)$, 则

$$E\left[\int_0^T X(t) dB(t)\right] = 0$$



(4) 等距性 如果 $E[\xi_i^2] < \infty, (i = 0, 1, \dots, n - 1)$, 则

$$E \left[\int_0^T X(t) dB(t) \right]^2 = \int_0^T E[X^2(t)] dt$$

证明: 性质(1),(2)和(3)是简单的, 读者可自行证之, 这里只证明性质(4). 利用 Cauchy-Schwarz不等式, 得到

$$E[|\xi_i(B(t_{i+1}) - B(t_i)))|] \leq \sqrt{E(\xi_i^2)E[B(t_{i+1}) - B(t_i)]^2} < \infty$$

12/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



于是

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\int_0^T X dB\right] &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i))\right]^2 \\ &= E\left[\sum_{i=0}^{n-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j (B(t_{j+1}) - B(t_j))\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] + \\ &\quad 2 \sum_{i < j} E[\xi_i \xi_j (B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))](8.2.5) \end{aligned}$$

由Brown运动的独立增量性以及关于 ξ_i 的假定，利用定理1.5.7(1)，有

$$E[\xi_i \xi_j (B(t_{i+1}) - B(t_i))(B(t_{j+1}) - B(t_j))] = 0$$



所以，式(8.2.5)中的最后一项为零.由Brown运动的鞅性质，得

$$\begin{aligned} Var\left[\int_0^T X dB\right] &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E \left[E \left(\xi_i^2 (B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E \left[\xi_i^2 E \left((B(t_{i+1}) - B(t_i))^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E[\xi_i^2] (t_{i+1} - t_i) \\ &= \int_0^T E[X^2(t)] dt. \end{aligned}$$

14/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



有了前面的准备，我们现在可以将上述随机积分的定义扩展到更一般的可测适应随机过程类.

定义 8.2.2 设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是随机过程, $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ 是 σ 代数流, 如果对 $\forall t$, $X(t)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 则称 $\{X(t)\}$ 是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的

记

$$\mathcal{V}(0, T) := \left\{ h, h \text{ 是 } (\mathcal{F}_t) \text{ 适应过程, 满足 } E\left[\int_0^T h^2(s) ds\right] < \infty \right\}$$

Key Point: 随机积分 $\int_0^T X_t dW_t$ 由于布朗运动 W 的轨道太粗糙, 不能像黎曼积分来定义, 为了克服这种困难, 我们在定义积分的时候把被积函数 X 看成是二元函数, 而不是按照轨道去定义积分。

15/50

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



我们将随机积分的定义按下述步骤扩展到 $\mathcal{V}(0, T)$:

Key Point: 对于 $\mathcal{V}(0, T)$ 任意的函数 f , 我们希望找到一个简单随机过程 $\{\phi_n\}$ 使得二者在平方意义下距离趋于0, 即:

$$E\left[\int_0^T (f - \phi_n)^2 dt\right] \rightarrow 0.$$

Step 1: 首先, 令 $h \in \mathcal{V}$ 有界, 并且对每个 $\omega \in \Omega$, $h(\cdot, \omega)$ 连续. 则存在简单过程 $\{\phi_n\}$, 其中

$$\phi_n = \sum_j h(t_j, \omega) \cdot 1_{[t_j, t_{j+1})}(t) \in \mathcal{V}$$

使得当 $n \rightarrow \infty$ 时, 对每个 $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^T (h - \phi_n)^2 dt \rightarrow 0$$

因此由有界收敛定理得 $E\left[\int_0^T (h - \phi_n)^2 dt\right] \rightarrow 0$.



Step 2: 其次, 令 $h \in \mathcal{V}$ 有界, 可以证明存在 $h_n \in \mathcal{V}$ 有界, 且 $\forall \omega \in \Omega, \forall n, h_n(\cdot, \omega)$ 连续, 使得

$$E\left[\int_0^T (h - h_n)^2 dt\right] \rightarrow 0 \quad (8.2.6)$$

Step 3: 最后, 对任意的 $f \in \mathcal{V}$, 存在有界列 $g_n \in \mathcal{V}$, 使得

$$E\left[\int_0^T (f(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0 \quad (8.2.7)$$

Step 4: 对于任意 $f \in \mathcal{V}$, 我们能够找到 Step 1-3 中的 g_n, h_n, ϕ_n , 使得

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt\right] &\leq E\left[\int_0^T (f(t, \omega) - g_n(t, \omega))^2 dt\right] \\ &+ E\left[\int_0^T (g_n(t, \omega) - h_n(t, \omega))^2 dt\right] + E\left[\int_0^T (h_n(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt\right] \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$



上面Step 1 - 3的细节（了解就可以） 事实上，不妨设 $|h(t, \omega)| \leq M, \forall (t, \omega)$. 定义

$$h_n(t, \omega) = \int_0^t \psi_n(s - t) h(s, \omega) ds$$

这里 ψ_n 是 $\mathbb{R}$ 上非负连续函数，使得对所有的 $x \notin (-\frac{1}{n}, 0)$, $\psi_n(x) = 0$ 且 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x) dx = 1$. 则对每个 $\omega \in \Omega$, $h_n(\cdot, \omega)$ 连续且 $|h_n(t, \omega)| \leq M$. 由 $h \in \mathcal{V}$ 可以看出 $h_n \in \mathcal{V}$, 并且

当 $n \rightarrow \infty$ 时，对每个 $\omega \in \Omega$, 有

$$\int_0^T (h_n(s, \omega) - h(s, \omega))^2 ds \rightarrow 0$$

因此再次利用有界收敛定理得式(8.2.6).

18/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



上面Step 1 - 3的细节（了解就可以） 最后，对任意的 $f \in \mathcal{V}$ ，存在有界列 $h_n \in \mathcal{V}$ ，使得

$$E\left[\int_0^T (f(t, \omega) - h_n(t, \omega))^2 dt\right] \rightarrow 0$$

事实上，只要令

$$h_n(t, \omega) = \begin{cases} -n, & \text{若 } f(t, \omega) < -n \\ f(t, \omega), & \text{若 } -n \leq f(t, \omega) \leq n \\ n, & \text{若 } f(t, \omega) > n \end{cases}$$

利用控制收敛定理即得.



现在, 我们可以完成Itô积分 $\int_0^T f(t)dB(t)$, $f \in \mathcal{V}$ 的定义如下.

定义 8.2.3 设 $f \in \mathcal{V}(0, T)$, 则 f 的Itô积分定义为

$$\int_0^T f(t, \omega)dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n(t, \omega)dB_t(\omega), (L^2(P) \text{中极限}) \quad (8.2.8)$$

这里 $\{\phi_n\}$ 是初等随机过程的序列, 使得当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$E \left[\int_0^T (f(t, \omega) - \phi_n(t, \omega))^2 dt \right] \rightarrow 0. \quad (8.2.9)$$

注: 在实际问题中, 我们常常遇到的过程并不满足 $\mathcal{V}$ 中的可积性条件而仅仅满足下述的 $\mathcal{V}^*$ 中的条件. 事实上, Itô积分的定义可以推广到更广泛的过程 $\{h(s) : s \geq 0\}$ 类:

$$\mathcal{V}^* = \left\{ h : h \text{ 为 } \mathcal{F} \text{ 适应过程, 且满足 } \int_0^T h^2(s)ds < \infty, a.s. \right\}.$$



例 8.2.4 设 f 是连续函数, 考虑 $\int_0^1 f(B(t))dB(t)$. 因为 $B(t)$ 有连续的路径, 所以 $f(B(t))$ 也在 $[0, 1]$ 上连续, 从而 $\int_0^1 f(B(t))dB(t)$ 有定义. 然而根据 f 的不同, 这个积分可以有(或没有)有限的矩. 例如:

(1) 取 $f(t) = t$, 则由于 $\int_0^1 E[B^2(t)]dt < \infty$, $E[\int_0^1 B(t)dB(t)] = 0$ 并且由性质8.2.1(3) ~ (4)有

$$E \left[\int_0^1 B(t)dB(t) \right]^2 = \int_0^1 E[B^2(t)]dt = \frac{1}{2}$$

(2) 取 $f(t) = e^{t^2}$, 此时考虑 $\int_0^1 e^{B^2(t)}dB(t)$. 虽然积分存在, 但由于当 $t \geq \frac{1}{4}$ 时, $E[e^{2B^2(t)}] = \infty$, 所以 $\int_0^1 E[e^{2B^2(t)}]dt = \infty$, 即 $\int_0^1 E[f^2(B(t))]dt < \infty$ 不成立. 说明积分的二阶矩不存在.



例 8.2.5 求积分 $J = \int_0^1 t dB(t)$ 的均值与方差.

因为 $\int_0^1 t^2 dt < \infty$, 且 t 是 $\mathcal{F}_t = \sigma\{B(s), 0 \leq s \leq t\}$ 适应的, 所以 Itô 积分 J 是适定的并且其均值为 $E[J] = 0$, 方差为 $E[J^2] = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$.

例 8.2.6 估计使得积分 $\int_0^1 (1-t)^{-\alpha} dB(t)$ 适定的 α 的值.

因为只要 $\int_0^1 (1-t)^{-2\alpha} dt < \infty$, 上述 Itô 积分就适定, 所以只要 $\alpha < \frac{1}{2}$ 即可.

22/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit

一般情况下布朗运动随机积分是一个随机变量, 满足下述性质. (1) 线性性

$$\int_0^T (\alpha X(t) + \beta Y(t)) dB(t) = \alpha \int_0^T X(t) dB(t) + \beta \int_0^T Y(t) dB(t)$$

(2)

$$\int_0^T I_{[a,b]}(t) dB(t) = B(b \wedge T) - B(a \vee 0)$$

(3) 零均值性

$$E\left[\int_0^T X(t) dB(t)\right] = 0$$

(4) 等距性 如果 $X \in \mathcal{V}(0, T)$, 则

$$E\left[\int_0^T X(t) dB(t)\right]^2 = \int_0^T E[X^2(t)] dt$$



§8.3 Itô积分过程

假设对任意实数 $T > 0$, $X \in \mathcal{V}^*$, 那么 $\forall t \leq T$, 积分 $\int_0^t X(s)dB(s)$ 是适定的. 因为对任意固定的 t , $\int_0^t X(s)dB(s)$ 是一个随机变量, 所以作为上限 t 的函数, 它定义了一个随机过程 $\{Y(t)\}$, 其中

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s) \quad (8.3.1)$$

可以证明, Itô 积分 $Y(t)$ 存在连续的样本路径, 即存在一个连续随机过程 $\{Z(t)\}$, 使得对所有的 t , 有 $Y(t) = Z(t)$, $a.s.$. 因此, 从现在起我们所讨论的积分都假定是其连续的样本路径. 本节将讨论这一积分过程的各种随机性质.

24/50

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



现在我们可以证明其鞅性质.

定理 8.3.1 设 $X(t) \in \mathcal{V}^*$, 并且 $\int_0^\infty E[X^2(s)]ds < \infty$,
则

$$Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s), \quad 0 \leq t \leq T$$

是零均值的连续的平方可积鞅(即 $\sup_{t \leq T} E[Y^2(t)] < \infty$).

证明: 由定义8.2.3后注, 可知 $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$, $0 \leq t \leq T$ 是适定的, 并且具有一阶及二阶矩. 如果 $\{X(t)\}$ 是简单过程, 则由式(8.2) 之同样的证明方法可得

$$E \left[\int_s^t X(u)dB(u) | \mathcal{F}_s \right] = 0, \quad \forall s < t$$

25/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



于是

$$\begin{aligned} E[Y(t)|\mathcal{F}_s] &= E\left[\int_0^t X(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \int_0^s X(u)dB(u) + E\left[\int_s^t X(u)dB(u)|\mathcal{F}_s\right] \\ &= \int_0^s X(u)dB(u) = Y(s) \end{aligned}$$

所以 $\{Y(t)\}$ 是鞅. 由等距性可得其二阶矩

$$E\left[\int_0^t X(s)dB(s)\right]^2 = \int_0^t E[X^2(s)]ds$$

26/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



推论 8.3.2 对任意有界的Borel可测函数 f (即对任意 $a \in \mathbb{R}$, 有 $\{x \in R, f(x) \leq a\} \in \mathcal{B}(R)$), $\int_0^t f(B(s))dB(s)$ 是平方可积鞅.

证明: $X(t) = f(B(t))$ 是可测适应的, 并且有常数 $K > 0$ 使得 $|f(x)| < K$, 于是 $\int_0^T E[f^2(B(s))]ds \leq KT$. 由定理8.3.1, 此命题得证. ■

上述定理提供了构造鞅的方法. 在8.2节中我们已经证明, 非随机的简单过程的 Itô积分是正态分布的随机变量. 更一般地, 我们有下述定理.

27/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定理 8.3.3 如果 X 是非随机的, 且 $\int_0^T X^2(s)ds < \infty$,
则 $\forall t, Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$ 是正态分布的随机变量. 即 $\{Y(t), 0 \leq t \leq T\}$ 是Gauss过程, 其均值函数为零, 协方差函数为

$$\text{Cov}(Y(t), Y(t+u)) = \int_0^t X^2(s)ds, \quad u \geq 0$$

$\{Y(t)\}$ 也是平方可积鞅.

28/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit

证明：因为被积函数是非随机的，所以 $\int_0^t E[X^2(s)]ds = \int_0^t X^2(s)ds < \infty$. 由定理8.3.1 知 Y 具有零均值，再由积分及 $Y(t)$ 的鞅性质，有

$$\begin{aligned} & E \left[\int_0^t X(s)dB(s) \int_t^{t+u} X(s)dB(s) \right] \\ &= E \left[E \left[\int_0^t X(s)dB(s) \int_t^{t+u} X(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= E \left[\int_0^t X(s)dB(s) E \left[\int_t^{t+u} X(s)dB(s) \mid \mathcal{F}_t \right] \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$



因此

$$\begin{aligned} & Cov(Y(t), Y(t+u)) \\ &= E \left[\int_0^t X(s) dB(s) \int_0^{t+u} X(s) dB(s) \right] \\ &= E \left[\int_0^t X(s) dB(s) \left(\int_0^t X(s) dB(s) + \int_t^{t+u} X(s) dB(s) \right) \right] \\ &= E \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right]^2 \\ &= \int_0^t E[X^2(s)] ds \\ &= \int_0^t X^2(s) ds \end{aligned} \tag{8.3.2}$$

■

例 8.3.4 根据上述定理可得 $J = \int_0^t s dB(s) \sim N(0, \frac{t^3}{3})$.

30/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



下面讨论Itô积分的二次变差.

定义 8.3.5 设 $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$, $0 \leq t \leq T$ 是Itô积分, 如果在依概率收敛的意义下, 极限

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n)|^2 \quad (8.3.3)$$

当 $\{t_i^n\}_{i=0}^n$ 遍取 $[0, t]$ 的分割, 且其模 $\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$ 时存在, 则称此极限为 Y 的二次变差, 记为 $[Y, Y](t)$.

定理 8.3.6 设 $Y(t) = \int_0^t X(s)dB(s)$, $0 \leq t \leq T$ 是Itô积分, 则 Y 的二次变差为

$$[Y, Y](t) = \int_0^t X^2(s)ds \quad (8.3.4)$$



证明：首先考虑 $\{X(s)\}$ 为简单过程的情形，对一般情形，我们可以用简单过程逼近的方法得到，所以这里我们只证明 $\{X(s)\}$ 为简单过程的情形. 不妨假定 $X(s)$ 在 $[0, T]$ 上只取两个不同的值，取任意有限多个值的情形可类似证之. 为简单起见，设 $T = 1$ ， $X(t)$ 在 $[0, 1/2]$ 上取 ξ_0 ，在 $(1/2, 1]$ 上取 ξ_1 ，即

$$X(t) = \xi_0 I_{[0, \frac{1}{2}]}(t) + \xi_1 I_{(\frac{1}{2}, 1]}(t)$$

于是

$$Y(t) = \int_0^t X(s) dB(s) = \begin{cases} \xi_0 B(t), & \text{如果} \\ \xi_0 B(\frac{1}{2}) + \xi_1 (B(t) - B(\frac{1}{2})), & \text{如果} \end{cases}$$

32/50

$$t \leq \frac{1}{2}$$
$$t > \frac{1}{2}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



因此, 对 $[0, t]$ 的任何分割, 有

$$Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n) = \begin{cases} \xi_0(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)), & \text{如果 } t_i^n < t_{i+1}^n \leq \frac{1}{2} \\ \xi_1(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)), & \text{如果 } \frac{1}{2} \leq t_i^n < t_{i+1}^n \end{cases}$$

当 $t \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned} [Y, Y](t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \\ &= \xi_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\ &= \xi_0^2 [B, B](t) = \xi_0^2 t = \int_0^t X^2(s) ds \end{aligned}$$

33/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



当 $t > \frac{1}{2}$ 时,

$$\begin{aligned}[Y, Y](t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (Y(t_{i+1}^n) - Y(t_i^n))^2 \\&= \xi_0^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i < \frac{1}{2}} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 + \xi_1^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i > \frac{1}{2}} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \\&= \xi_0^2 [B, B](\frac{1}{2}) + \xi_1^2 [B, B](\frac{1}{2}, t] = \int_0^t X^2(s) ds\end{aligned}$$

这里的极限都是当 $\delta_n \rightarrow 0$ 时在依概率收敛意义下的极限. ■

34/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



对关于同一个Brown运动 $\{B(t)\}$ 的两个不同的Itô积分 $Y_1(t) = \int_0^t X_1(s)dB(s)$ 和 $Y_2(t) = \int_0^t X_2(s)dB(s)$, 由于 $Y_1(t) + Y_2(t) = \int_0^t (X_1(s) + X_2(s))dB(s)$, 我们可以定义 Y_1 和 Y_2 的二次协变差:

$$[Y_1, Y_2](t) = \frac{1}{2}([Y_1 + Y_2, Y_1 + Y_2](t) - [Y_1, Y_1](t) - [Y_2, Y_2](t))$$

由定理8.3.6, 有

$$[Y_1, Y_2](t) = \int_0^t X_1(s)X_2(s)ds.$$

35/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§8.4 Itô公式

Itô公式，随机分析中的变量替换公式或链锁法则，是随机分析中的一个主要工具，许多重要的公式，例如Dynkin公式，Feynman-Kac公式以及分部积分公式，都是由Itô公式导出的.

因为Brown运动在 $[0, t]$ 上的二次变差为 t ，即在依概率收敛的意义下

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 = t$$

这里 $\{t_i^n\}$ 是 $[0, t]$ 的分割， $\delta_n = \max_{0 \leq i \leq n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n)$.

36/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



上式从形式上可表示为

$$\int_0^t (dB(s))^2 = \int_0^t ds = t$$

或

$$(dB(t))^2 = dt$$

更一般地，我们有以下定理.

定理 8.4.1 设 g 是有界连续函数， $\{t_i^n\}$ 是 $[0, t]$ 的分割，则对任何 $\theta_i^n \in (B(t_{i+1}^n), B(t_i^n))$ (即 $B(t_i^n), B(t_{i+1}^n)$ 之间的任意值)，依概率收敛意义下的极限

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n) (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 = \int_0^t g(B(s)) ds \quad (8.4.1)$$

37/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



证明：首先取 $\theta_i^n = B(t_i^n)$ ，由 g 的连续性和积分的定义，有

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow \int_0^t g(B(s))ds \quad (8.4.2)$$

我们证明

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 - \sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0 \quad (8.4.3)$$

在 L^2 中成立. 记 $\Delta B_i = B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)$, $\Delta t_i = t_{i+1}^n - t_i^n$, 则由Brown运动的独立增量性和取条件期望的方法得到



39/50

$$\begin{aligned} & E \left[\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \right]^2 \\ &= E \left[E \left(\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right) \right] \\ &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) E \left(((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_i} \right) \right] \\ &= 2E \left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) (\Delta t_i)^2 \right] \\ &\leq 2\delta_n E \left[\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n)) \Delta t_i \right] \rightarrow 0, \quad (\text{当 } \delta_n \rightarrow 0 \text{ 时}) \end{aligned}$$



GoBack

FullScreen

Close

Quit



因此，在均方收敛的意义下

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i) \rightarrow 0$$

这样， $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2$ 与
 $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))(t_{i+1}^n - t_i^n)$ 有相同的极限 $\int_0^t g(B(s))ds$.

对任意 $\theta_i^n \in (B(t_{i+1}^n), B(t_i^n))$ ，当 $\delta_n \rightarrow 0$ 时，

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} (g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n)))(\Delta B_i)^2 \\ & \leq \max_i (|g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n))|) \sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

40/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



由 g 和 B 的连续性, 我们有 $\max_i ((g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n))) \rightarrow 0, \text{ a.s.}$
由Brown运动二次变差的定义得 $\sum_{i=0}^{n-1} (B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \rightarrow t$.

于是当 $\delta_n \rightarrow 0$ 时, $\sum_{i=0}^{n-1} (g(\theta_i^n) - g(B(t_i^n))) (\Delta B_i)^2 \rightarrow 0$.
因此 $\sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n) (\Delta B_i)^2$ 与 $\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n)) (\Delta B_i)^2$ 具有相同的依概率收敛意义的极限 $\int_0^t g(B(s)) ds$. ■

41/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



现在，我们给出Itô公式.

定理 8.4.2 如果 f 是二次连续可微函数，则对任何 t ，有

$$f(B(t)) = f(0) + \int_0^t f'(B(s))dB(s) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B(s))ds \quad (8.4.5)$$

证明：易见式(8.4.5)中的积分都是适定的.取 $[0, t]$ 的分割 $\{t_i^n\}$ ，有

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} [f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))]$$

对 $f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n))$ 应用Taylor公式得

42/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$f(B(t_{i+1}^n)) - f(B(t_i^n)) = f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)) \\ + \frac{1}{2}f''(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2$$

其中 $\theta_i^n \in (B(t_{i+1}^n), B(t_i^n))$. 于是

$$f(B(t)) = f(0) + \sum_{i=0}^{n-1} f'(B(t_i^n))(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n)) + \\ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} f''(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n) - B(t_i^n))^2 \quad (8.4.6)$$

令 $\delta_n \rightarrow 0$ 取极限, 则式(8.4.6)中的第一个和收敛于Itô积分 $\int_0^t f'(B(s))dB(s)$. 利用定理8.4.1可知式(8.4.6)中的第二个和收敛于 $\int_0^t f''(B(s))ds$. ■



式(8.4.5)称为Brown运动的Itô公式, 由此看出, Brown运动的函数可以表示为一个Itô积分加上一个具有有界变差的绝对连续过程. 我们称这类过程为Itô过程, 严格地, 我们有下面定义.

定义 8.4.3 如果过程 $\{Y(t), 0 \leq t \leq T\}$ 可以表示为

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \mu(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dB(s), \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.4.7)$$

其中过程 $\{\mu(t)\}$ 和 $\{\sigma(t)\}$ 满足

- (1) $\mu(t)$ 是适应的并且 $\int_0^T |\mu(t)|dt < \infty, \quad a.s.$
- (2) $\sigma(t) \in \mathcal{V}^*$.

则称 $\{Y(t)\}$ 为**Itô**过程.



有时我们也将Itô过程(8.4.7)记为微分的形式

$$dY(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.4.8)$$

其中函数 $\mu(t)$ 称为漂移系数, $\sigma(t)$ 称为扩散系数,它们可以依赖于 $Y(t)$ 或 $B(t)$, 甚至整个路径 $\{B(s), s \leq t\}$, (例如 $\mu(t) = \cos(M(t) + t)$, 这里 $M(t) = \max_{s \leq t} B(s)$). 一类非常重要的情形是 μ 与 $\sigma(t)$ 仅仅通过 $Y(t)$ 依赖于 t , 在这种情况下, 式(8.4.8)应改写为

$$dY(t) = \mu(Y(t))dt + \sigma(Y(t))dB(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (8.4.9)$$

如果用微分形式表示, Itô公式(8.4.5)变为

$$d(f(B(t))) = f'(B(t))dB(t) + \frac{1}{2}f''(B(t))dt \quad (8.4.10)$$



例 8.4.4 求 $d(e^{B(t)})$.

解 对函数 $f(x) = e^x$ 用Itô公式, 此时 $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, 所以

$$d(e^{B(t)}) = e^{B(t)}dB(t) + \frac{1}{2}e^{B(t)}dt$$

于是, $X(t) = e^{B(t)}$ 具有随机微分形式

$$dX(t) = X(t)dB(t) + \frac{1}{2}X(t)dt$$

46/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



在金融应用中，股票的价格 $S(t)$ 是用随机微分方程 $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$ 描述的.如果 $a(t)$ 表示在时刻 t 投资者的股票各股收益，那么在整个时间区间 $[0, T]$ 内的收益为

$$\int_0^T a(t)dS(t) = \mu \int_0^T a(t)S(t)dt + \sigma \int_0^T a(t)S(t)dB(t)$$

下面定理给出了关于Itô过程的Itô公式

47/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定理 8.4.5 设 $\{X(t)\}$ 是由

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t)$$

给出的Itô过程, $g(t, x)$ 是 $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ 上的二次连续可微函数. 则

$$\{Y(t) = g(t, X(t))\}$$

仍为Itô过程, 并且

$$\begin{aligned} dY(t) = & \frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))dX(t) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t)) \cdot (dX(t))^2 \end{aligned} \quad (8.4.11)$$

其中 $(dX(t))^2 = (dX(t)) \cdot (dX(t))$ 按照下面规则计算:

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB(t) = dB(t) \cdot dt = 0, \quad dB(t) \cdot dB(t) = dt$$



即(8.4.11)可以改写为

$$dY(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\mu(t) \right) dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X(t))\sigma(t)dB(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma^2(t)dt$$

特别地, 如果 $g(t, x) = g(x)$ 只是 x 的函数, (8.4.12)简化为

$$dY(t) = [g'(X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}g''(X(t))\sigma^2(t)]dt + g'(X(t))\sigma(t)dB(t) \quad (8.4.12)$$

49/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit



例 8.4.6 短期利率模型（ Vasicek model ）由如下的方程给出

$$dR_t = a(b - R_t)dt + \sigma dB_t, \quad R_0 = r.$$

利用ITô公式计算 $d(R_te^{at})$ ，并解出 R_t .

50/50



GoBack

FullScreen

Close

Quit