



# 应用随机过程

吴卫星 & 邓军

对外经济贸易大学

金融学院

1/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## 第六章: Martingale

本章将介绍另一类特殊的随机过程——鞅.近几十年来,鞅理论不仅在随机过程及其他数学分支中占据了重要的地位,而且在实际问题诸如金融、保险和医学上也得到了广泛的应用.在此我们将阐述鞅的一些基本理论,并以介绍离散时间鞅为主.

鞅的定义是从条件期望出发的,所以对条件期望不熟悉的读者请先学习第1章中的相关内容,这对于理解鞅理论是至关重要的.

2/42

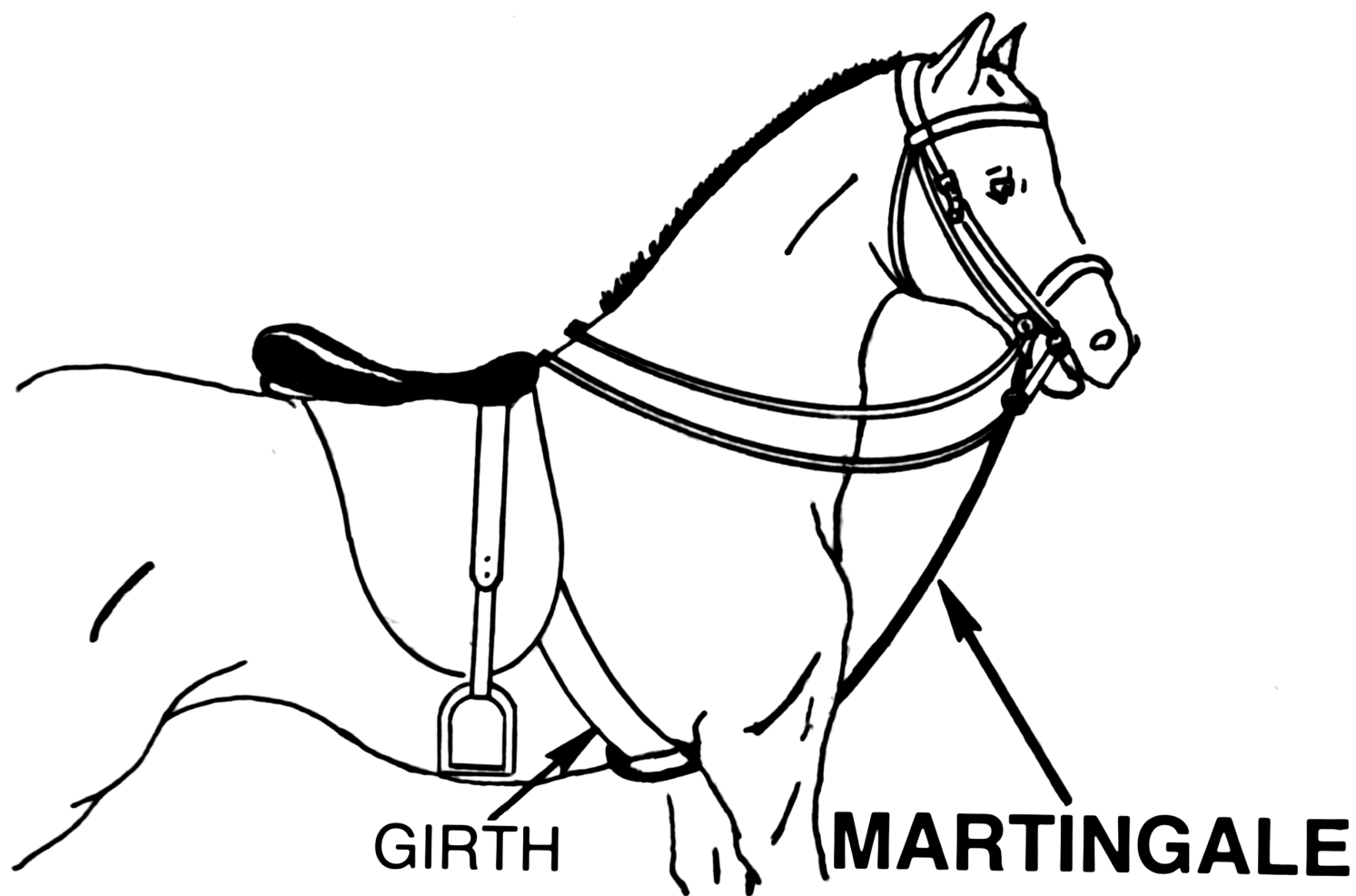


GoBack

FullScreen

Close

Quit



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## §6.1 基本概念

每个赌博者自然都对能使他在一系列赌博后获得期望收益最大的策略感兴趣.然而在数学上可以证明,在“公平”的博弈中,是没有这样的赌博策略的.

假设一个赌博者正在进行一系列赌博,每次赌博输赢的概率都是 $\frac{1}{2}$ . 令 $\{Y_n, n = 1, 2, \dots\}$ , 是一列独立同分布的随机变量, 表示每次赌博的结果

$$P\{Y_n = 1\} = P\{Y_n = -1\} = \frac{1}{2}$$

这里 $\{Y_n = 1\}$  ( $\{Y_n = -1\}$ )表示赌博者在第 $n$ 次赌博时的赢(输).



如果赌博者采用的赌博策略(即所下赌注)依赖于前面的赌博结果, 那么他的赌博可以用下面的随机变量序列

$$b_n = b_n(Y_1, \cdots, Y_{n-1}), n = 2, 3, \cdots$$

描述, 其中 $b_n < \infty$ 是第 $n$ 次的赌注, 若赌赢则获利 $b_n$ , 否则输掉 $b_n$ .

设 $X_0$ 是该赌博者的初始赌资, 则

$$X_n = X_0 + \sum_{i=1}^n b_i Y_i \quad (6.1.1)$$

是他在第 $n$ 次赌博后的赌资. 可以断言

$$E[X_{n+1} | Y_1, \cdots, Y_n] = X_n.$$

事实上, 由式(6.1.1)我们可以得到

$$X_{n+1} = X_n + b_{n+1} Y_{n+1},$$



因此

$$\begin{aligned} E[X_{n+1}|Y_1, \cdots, Y_n] &= E[X_n|Y_1, \cdots, Y_n] + E[b_{n+1}Y_{n+1}|Y_1, \cdots, Y_n] \\ &= X_n + b_{n+1}E[Y_{n+1}|Y_1, \cdots, Y_n] \\ &\quad (\text{因为 } X_n \text{ 与 } b_{n+1} \text{ 由 } Y_1, \cdots, Y_n \text{ 确定}) \\ &= X_n + b_{n+1}E[Y_{n+1}] \\ &\quad (\text{因为 } \{Y_n\} \text{ 是独立随机变量序列}) \\ &= X_n \quad (\text{因为 } E[Y_{n+1}] = 0, \quad \forall n \geq 0) \end{aligned}$$

这证明了，如果每次赌博的输赢机会是均等的，并且赌博策略是依赖于前面的赌博结果，则赌博是“公平的”。因此任何赌博者都不可能将公平的赌博通过改变赌博策略使得赌博变成有利于自己的赌博。

6/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## 鞅的直观本质意义

鞅描述的是“公平”的赌博，下鞅和上鞅分别描述了“有利”赌博与“不利”赌博. 下面我们定义关于 $\sigma$ 代数的鞅.

### 域流 Filtration

- 给定样本空间 $\Omega$ 和时间指标集 $T$ , 若存在一族 $\sigma$ -代数  $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$  使得对任意的  $0 \leq s < t$  都有  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ , 则称  $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$  为  $\Omega$ 上的一个 域流 (filtration).
- 对于概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , 和 $\Omega$ 上的一个域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ , 则称四元组  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, P)$  为一个带域流的概率空间, 或者过滤的 (filtered probability space) 概率空间。
- 域流的概念可以动态地刻画随机过程的可测性和信息递增, 为后面的条件期望的定义做好准备。
- 思考: 带域流的概率空间的逻辑?

7/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## 适应过程 (adapted process)

- 给定一个带域流的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}, P)$ . 如果一个随机过程  $\{X_t\}_{t \in T}$  满足对任意的  $t \in T$  都有

$$X_t \in \mathcal{F}_t, \quad \text{亦即 } X_t \text{ 是 } \mathcal{F}_t \text{ 可测的, 或记为 } \sigma(X_t) \subset \mathcal{F}_t,$$

则称  $\{X_t\}$  为关于域流  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$  **适应的** (adapted) 过程。

- 适应过程在每一时间处都可以由当前已知信息来描述 (而不是给定)。
- 本课程中的金融随机过程 (资产价格、投资组合头寸等) 都是适应的。

8/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## 可料过程 (predictable process)

- 给定一个带域流的概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,\dots,N}, P)$ . 如果一个随机过程  $\{X_n\}_{n=0,1,\dots,N}$  满足对任意的  $n$  都有

$$X_n \in \mathcal{F}_{n-1}, \quad \text{亦即 } X_n \text{ 是 } \mathcal{F}_{n-1} \text{ 可测的,}$$

则称  $\{X_n\}$  为关于域流  $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,\dots,N}$  **可料** (predictable) 过程。

- 可料过程在每一时间处都可以由前一期信息来描述（而不是给定）。
- 在离散时间框架下，我们讨论的策略都是可料的。

9/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## 回忆条件数学期望的性质

**定理 6.1.1** 若 $X$ 为一随机变量,  $\mathcal{G}$ 为 $\sigma$ -代数。则:

- (1)  $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$ .
- (2) 若 $X$ 是 $\mathcal{G}$ 可测, 则 $E[X|\mathcal{G}] = X, a.s..$
- (3) 设 $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ , 则 $E[X|\mathcal{G}] = E[X], a.s..$
- (7)  $|E[X|\mathcal{G}]| \leq E[|X||\mathcal{G}], a.s..$
- (9) 设 $X$ 及 $XY$ 的期望存在, 且 $Y$ 为 $\mathcal{G}$ 可测, 则

$$E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}], a.s.$$

- (10) 若 $X$ 与 $\mathcal{G}$ 相互独立(即 $\sigma(X)$ 与 $\mathcal{G}$ 相互独立), 则有

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X], a.s.$$

- (11) 若 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  是两个子 $\sigma$ 代数, 使得 $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ , 则

$$E[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1] = E[X|\mathcal{G}_1], a.s.$$

10/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**定义 6.1.2** 设 $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是一个 $\mathcal{F}$ 中的单调递增的子 $\sigma$ 代数列. 随机过程 $\{X_n, n \geq 0\}$ 称为关于 $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 的鞅, 如果:

- $\{X_n\}$ 是 $\{\mathcal{F}_n\}$  适应的
- $E[|X_n|] < \infty$
- 并且 $\forall n \geq 0$ , 有

$$E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n \quad (6.1.2)$$

- 适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 称为 下鞅, 如果 $\forall n \geq 0$ ,

$$E[X_n^+] < \infty \quad \text{且} \quad E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \geq X_n \quad (6.1.3)$$

- 上鞅可以类似定义.

在给出例子之前, 先给出由定义直接推出的命题.



**命题 6.1.3** (1) 适应列 $\{X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是下鞅当且仅当  $\{-X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 是上鞅.

(2) 如果 $\{X_n, \mathcal{F}_n\}, \{Y_n, \mathcal{F}_n\}$ 是两个下鞅,  $a, b$  是两个正常数, 则 $\{aX_n + bY_n, \mathcal{F}_n\}$ 是下鞅.

(3) 如果 $\{X_n, \mathcal{F}_n\}, \{Y_n, \mathcal{F}_n\}$ 是两个下鞅(或上鞅), 则  $\{\max(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n\}$  ( $\{\min(X_n, Y_n), \mathcal{F}_n\}$ ) 是下鞅(上鞅).

证明是简单的, 留作习题.

若以 $X_n$ 表示一个赌博者在第 $n$ 次赌博后所有的赌资. 式(6.1.2)表示: 平均而言他在下一次赌博结束时的赌资将等于现时的赌资, 与他过去赌博的输赢无关.这也就是说鞅具有一种“无后效性”, 同时这体现的正是博弈的公平.

12/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.1.4** 设  $X_1, X_2, \dots$  是一族独立随机变量序列, 且  $E[|X_i|] < \infty$ , 令  $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ , 则:

(a) 若对于所有的  $n$ ,  $E(X_n) = 0$ , 则  $\{S_n\}$  是(关于  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ )的鞅.

(b) 若  $E(X_k) = \mu \neq 0$ , 则  $\{M_n = S_n - n\mu\}$  是(关于  $\{\mathcal{F}_n\}$  的)鞅.

证明: (a) 当  $E[X_k] = 0, (k = 1, 2, \dots)$  时, 易见  $S_n$  是  $\mathcal{F}_n$  可测的, 而且  $E[|S_n|] \leq \sum_{i=1}^n E[|X_i|] < \infty$ , 于是

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[X_1 + X_2 + \dots + X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= E[X_1 + \dots + X_n | \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n \end{aligned}$$

从而  $\{S_n\}$  是一个关于  $\{\mathcal{F}_n\}$  的鞅. 同理可以证明(b). ■



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.1.5** 在例6.1.4中设 $E[X_k] = \mu \neq 0, E[|X_k|] < \infty, (k = 1, 2, \dots)$ , 则有 $E[|S_n|] < \infty$ ,

$$E[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = E\left[\sum_{i=1}^n X_i + X_{n+1}|\mathcal{F}_n\right] = S_n + \mu$$

显然, 若 $\mu > 0 (\mu < 0)$ , 则 $\{S_n\}$ 是一关于 $\{\mathcal{F}_n\}$ 的下鞅(上鞅).

14/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.1.6** 考虑一个公平博弈问题. 设  $X_1, X_2, \dots$  独立同分布, 分布函数为

$$P\{X_i = 1\} = P\{X_i = -1\} = \frac{1}{2}$$

于是可以将  $X_i (i = 1, 2, \dots)$  看做一个投硬币游戏的结果: 如果出现正面就赢1元, 出现反面则输1元. 假设我们按以下的规则来赌博, 每次投掷硬币之前的赌注都比上一次翻一倍, 直到赢了赌博即停. 令  $W_n$  表示第  $n$  次赌博后所输(或赢)的总钱数, 则  $W_0 = 0$ , 由于无论何时只要赢了就停止赌博, 所以  $W_n$  从赢了之后起就不再变化, 于是有  $P\{W_{n+1} = 1 | W_n = 1\} = 1$ .



下假设前 $n$ 次投掷的硬币都出现了反面，按照规则，我们已经输了  $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$  元，即  $W_n = -(2^n - 1)$ . 假如下一次硬币出现的是正面，按规则  $W_{n+1} = 2^n - (2^n - 1) = 1$ ，由公平的前提知道

$$P\{W_{n+1} = 1 | W_n = -(2^n - 1)\} = \frac{1}{2}$$

$$P\{W_{n+1} = -2^n - 2^n + 1 | W_n = -(2^n - 1)\} = \frac{1}{2}$$

易证  $E[W_{n+1} | \mathcal{F}_n] = W_n$ ，这里  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ ，从而  $\{W_n\}$  是一个关于  $\{\mathcal{F}_n\}$  的鞅.



**例 6.1.7** 我们可以把例6.1.6再一般化. 设  $X_1, X_2, \dots$  仍如例6.1.6假定, 而每次赌博所下赌注将与前面硬币的投掷结果有关, 以  $B_n$  记第  $n$  次所下的赌注, 则  $B_n$  是  $X_1, \dots, X_{n-1}$  的函数, 换言之  $B_n$  是  $\mathcal{F}_{n-1}$  可测的 (设  $B_1$  为常数). 仍然令  $W_n$  同例6.1.6之定义,  $W_0 = 0$ , 则有

$$W_n = \sum_{j=1}^n B_j X_j$$

假设  $E[|B_n|] < \infty$  (这保证了每次的赌本都有一定节制), 那么  $\{W_n\}$  是一个  $\{\mathcal{F}_n\}$  鞅.



事实上, 注意到 $E[|W_n|] < \infty$  (这可由 $E[|B_n|] < \infty$ 得到), 而且 $W_n$ 是 $\mathcal{F}_n$  可测的, 并且

$$\begin{aligned} E[W_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E\left[\sum_{j=1}^{n+1} B_j X_j | \mathcal{F}_n\right] \\ &= E\left[\sum_{j=1}^n B_j X_j | \mathcal{F}_n\right] + E[B_{n+1} X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= \sum_{j=1}^n B_j X_j + B_{n+1} E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= W_n + B_{n+1} E[X_{n+1}] \\ &= W_n \end{aligned}$$

18/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.1.8** (Polya坛子抽样模型) 考虑一个装有红、黄两色球的坛子.假设最初坛子中装有红、黄两色球各一个,每次都按如下规则有放回地随机抽取: 如果拿出的是红色的球, 则放回的同时再加入一个同色的球; 如果拿出是黄色的球也采取同样的法. 以 $X_n$ 表示第 $n$ 次抽取后坛子中的红球数, 则 $X_0 = 1$ , 且 $\{X_n\}$ 是一个非时齐的Markov链, 转移概率为

$$P\{X_{n+1} = k + 1 | X_n = k\} = \frac{k}{n + 2}$$
$$P\{X_{n+1} = k | X_n = k\} = \frac{n + 2 - k}{n + 2}$$

令 $M_n$ 表示第 $n$ 次抽取后红球所占的比例, 则 $M_n = \frac{X_n}{n+2}$ , 并且 $\{M_n\}$ 是一个鞅. 这是因为

$$E[X_{n+1} | X_n] = X_n + \frac{X_n}{n + 2}$$



由于 $\{X_n\}$ 是一个Markov链, 则 $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ 中对 $X_{n+1}$ 有影响的信息都包含在 $X_n$ 中, 所以

$$\begin{aligned} E[M_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= E[M_{n+1}|X_n] \\ &= E\left[\frac{X_{n+1}}{n+1+2}|X_n\right] \\ &= \frac{1}{n+3}E[X_{n+1}|X_n] \\ &= \frac{1}{n+3}\left(X_n + \frac{X_n}{n+2}\right) \\ &= \frac{X_n}{n+2} = M_n. \end{aligned}$$

本例研究的模型是Polya首次引入的, 它适用于描述群体增值和传染病的传播等现象.

20/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



下面的引理可以让我们由已知的鞅或下鞅构造出许多新的下鞅.

考虑定义在有穷域无穷开区间 $I$ 上的函数 $\varphi(x)$ , 称它为凸的, 若 $\forall x, y \in I, 0 < \alpha < 1$ , 有

$$\alpha\varphi(x) + (1 - \alpha)\varphi(y) \geq \varphi[\alpha x + (1 - \alpha)y] \quad (6.1.4)$$

成立.

**引理 6.1.9** (条件Jensen不等式) 设 $\varphi(x)$ 为实数集 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, 随机变量 $M$ 满足

- (1)  $E[|M|] < \infty$ ;
- (2)  $E[|\varphi(M)|] < \infty$ .

则有

$$E[\varphi(M)|\mathcal{F}_n] \geq \varphi[E[M|\mathcal{F}_n]] \quad (6.1.5)$$

其中 $\mathcal{F}_n$ 是任意递增的 $\sigma$ 代数列.



式(6.1.5)是著名的条件Jensen不等式, 由它即可得到以下定理.

**定理 6.1.10** 设 $\{M_n, n \geq 0\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 的鞅(下鞅),  $\varphi(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的凸函数, 且满足 $E[\varphi(M_n)^+] < \infty, \forall n \geq 0$ , 则  $\{\varphi(M_n), n \geq 0\}$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$ 的下鞅. 特别地,  $\{|M_n|, n \geq 0\}$ 是下鞅; 当 $E[M_n^2] < \infty, \forall n \geq 0$ 时,  $\{M_n^2, n \geq 0\}$ 也是下鞅.

证明: 根据定义易证, 请读者利用引理6.1.9推导.

22/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## §6.2 鞅的停时定理及其应用

### §6.2.1 鞅的停时定理

本节中我们所讨论的鞅，都是指关于某个随机变量序列的鞅. 所得到的结论对关于 $\sigma$ 代数流的鞅也是成立的，为了便于理解和应用，我们没有追求结论的一般性. 对于一个关于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的鞅 $\{M_n, n \geq 0\}$ ，易知 $\forall n \geq 0$ ，有

$$E[M_n] = E[M_0] \quad (6.2.1)$$

我们想知道如果把此处固定的时间 $n$ 换作一个随机变量 $T$ ，是否仍然有

$$E[M_T] = E[M_0] \quad (6.2.2)$$



一般地，此结论未必成立.但在一定的条件下可以保证它成立，这就是鞅的停时定理. 鞅的停时定理的意义是：“在公平的赌博中，你不可能赢.” 设想 $\{M_n, n \geq 0\}$ 是一种公平的博奕， $M_n$ 表示局中人第 $n$ 次赌局结束后的赌本.式(6.2.1)说明他在每次赌局结束时的赌本与他开始时的赌本一样，但是他未必一直赌下去，他可以选择任一时刻停止赌博，这一时刻是随机的.式(6.2.2)说明他停止时的赌本和他开始时的赌本相同，然而很容易看出在一般的情况下，这是不正确的.比如例6.1.6中的赌博者采取的策略，就可以保证他在赢一元之后结束，所以我们要为式(6.2.2)的成立附加一些条件.



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**定义 6.2.1** (停时) 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个随机变量序列, 称随机函数 $T$ 是关于 $\{\mathcal{F}_n := \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}, n \geq 0\}$ 的停时, 如果  $T$ 在 $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ 中取值, 且对每个 $n \geq 0$ ,  $\{T = n\} \in \mathcal{F}_n := \sigma\{X_0, X_1, \dots, X_n\}$ .

由定义我们知道事件 $\{T = n\}$ 或 $\{T \neq n\}$ 都应该由 $n$ 时刻及其之前的信息完全确定, 而不需要也无法借助将来的情况. 仍然回到公平博奕的例子, 赌博者决定何时停止赌博只能以他已经赌过的结果为依据, 而不能说, 如果我下一次要输我现在就停止赌博, 这是对停止时刻 $T$ 的第一个要求: 它须是一个停时.

以下看几个停时的例子.

**例 6.2.2** 确定时刻 $T = n$ 是一个停时, 即在赌博开始已确定 $n$ 局之后一定结束, 易见这是一个停时.



**例 6.2.3** (首达时) $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一个随机变量序列,  
 $A$ 是一个事件集, 令

$$T(A) = \inf\{n, X_n \in A\}, \text{ 并约定 } T(\emptyset) = \inf\{n, X_n \in \emptyset\} = \infty,$$

可见 $T(A)$ 是 $\{X_n, n \geq 0\}$ 首次进入 $A$ (即发生了 $A$ 中所含事件)的时刻, 称 $T(A)$ 是 $\{X_n, n \geq 0\}$ 到集合 $A$ 的首达时。则:  
 $T(A)$ 是关于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的停时.

证明: 事实上

$$\{T(A) = n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\}$$

显然 $\{T(A) = n\}$ 完全由 $X_0, X_1, \dots, X_n$ 决定, 从而 $T(A)$ 是关于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 的停时.

**例 6.2.4** 如果 $T$ 和 $S$ 是两个停时, 则 $T+S, \min(T, S)$ 和 $\max(T, S)$ 也是停时. 这可由下述简单的命题来证明.

26/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**命题 6.2.5** 设 $T$ 是取值于 $\{0, 1, 2, \dots, \infty\}$ 的随机变量, 则下述三者等价

$$(1) \quad \{T = n\} \in \mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n);$$

$$(2) \quad \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n);$$

$$(3) \quad \{T > n\} \in \mathcal{F}_n := \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n).$$

只要注意到如下等式, 即可证明(1),(2),(3)的等价性.

$$\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{T = k\}$$

$$\{T > n\} = \Omega - \{T \leq n\}$$

$$\{T = n\} = \{T \leq n\} - \{T \leq n-1\}$$

27/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



这就可以证明  $T + S$ ,  $\max(T, S)$  和  $\min(T, S)$  是停时. 特别地, 由例 6.2.2 可知, 常数  $n$  是停时. 设  $T$  是停时, 令  $T_n = \min\{T, n\}$ , 则每个  $T_n$  都是停时, 并且有  $T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq n, \forall n$ .

在给出停时定理之前先注意以下事实.

**命题 6.2.6** 设  $\{M_n, n \geq 0\}$  是一个关于  $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k}$  的鞅,  $T$  是一个关于  $(\mathcal{F}_k)_{0 \leq k}$  的停时, 且  $T \leq K$ . 其中,  $K$  为一正整数. 则

$$E[M_T | \mathcal{F}_0] = M_0$$

特别地,

$$E[M_T] = E[M_0]$$

证明: 由于  $T \leq K$ , 即  $T$  只取有限值, 且当  $T = j$  时  $M_T =$

$M_j$ , 我们可以把 $M_T$ 写作

$$M_T = \sum_{j=0}^K M_j I_{\{T=j\}} \quad (6.2.3)$$

对式(6.2.3)关于 $\mathcal{F}_{K-1}$ 取条件期望, 有



29/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$\begin{aligned} E[M_T | \mathcal{F}_{K-1}] &= E\left[\sum_{j=0}^K M_j I_{\{T=j\}} | \mathcal{F}_{K-1}\right] \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}} | \mathcal{F}_{K-1}\right] + E[M_K I_{\{T=K\}} | \mathcal{F}_{K-1}] \end{aligned}$$

当  $j \leq K - 1$  时,  $M_j$  和  $I_{\{T=j\}}$  都是  $\mathcal{F}_{K-1}$  可测的, 从而

$$E\left[\sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}} | \mathcal{F}_{K-1}\right] = \sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}}$$

又因为  $T \leq K$  已知, 则  $\{T = K\}$  与  $\{T > K - 1\}$  是等价的, 由例6.2.4中结果知  $\{T > K - 1\} \in \sigma(X_0, \dots, X_{K-1})$ , 因

30/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit

此

$$\begin{aligned} E[M_K I_{\{T=K\}} | \mathcal{F}_{K-1}] &= I_{\{T > K-1\}} E[M_K | \mathcal{F}_{K-1}] \\ &= I_{\{T > K-1\}} M_{K-1} \end{aligned}$$



31/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



从而

$$\begin{aligned} E[M_T | \mathcal{F}_{K-1}] &= I_{\{T > K-1\}} M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-1} M_j I_{\{T=j\}} \\ &= I_{\{T > K-2\}} M_{K-1} + \sum_{j=0}^{K-2} M_j I_{\{T=j\}} \end{aligned}$$

重复以上运算，关于  $\mathcal{F}_{K-2}$  取条件期望，我们可以得到

$$\begin{aligned} E[M_T | \mathcal{F}_{K-2}] &= E[E[M_T | \mathcal{F}_{K-1}] | \mathcal{F}_{K-2}] \\ &= I_{\{T > K-3\}} M_{K-2} + \sum_{j=0}^{K-3} M_j I_{\{T=j\}} \end{aligned}$$

继续这样的过程，最终有

$$E[M_T | \mathcal{F}_0] = I_{\{T \geq 0\}} M_0 = M_0$$

32/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## 定理 6.2.7 (鞅停时定理)

设  $\{M_n, n \geq 0\}$  是一个关于  $\{\mathcal{F}_n\}$  的鞅,  $T$  是停时且满足

$$(1) P\{T < \infty\} = 1; \quad (6.2.4)$$

$$(2) E[|M_T|] < \infty; \quad (6.2.5)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} E[|M_n| I_{\{T > n\}}] = 0. \quad (6.2.6)$$

则有

$$E[M_T] = E[M_0]$$

33/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.2.8** 设 $\{X_n\}$ 是在 $\{0, 1, \dots, N\}$ 上的简单随机游动( $p = \frac{1}{2}$ ), 并且0和 $N$ 为两个吸收壁. 设 $X_0 = a$ . 即当 $X$ 触及到0或者 $N$ 时, 就停止不动了. 计算:  $X$ 被 $N$ 吸收的概率.

**Proof** 容易验证 $\{X_n\}$ 是一个鞅. 令

$$T = \min\{j : X_j = 0 \text{ 或 } N\}$$

, 则 $T$ 是一个停时. 由于 $X_n$ 的取值有界, 故式(6.2.5)(6.2.6)满足(注意到若鞅本身取值有界且式(6.2.4)成立, 则式(6.2.5)和式(6.2.6)一定成立, 这也是另一种形式的鞅停时定理). 从而

$$E[X_T] = E[X_0] = a$$

由于此时 $X_T$ 只取两个值 $N, 0$ ,

$$E[X_T] = N \cdot P\{X_T = N\} + 0 \cdot P\{X_T = 0\}$$



从而得到

$$P\{X_T = N\} = \frac{E[X_T]}{N} = \frac{a}{N}$$

即在被吸收时刻它处于 $N$ 点的概率为 $a/N$ .

**思考题：** 如果 $X$ 的吸收壁不是0和 $N$ 而是  $N_1$ 和 $N_2$  ( $N_1 < a < N_2$ )。计算 $X$ 被 $N_1$ 和 $N_2$ 吸收的概率。

35/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.2.9** (忽略这个例子) 令  $X_n$  和  $T$  如例 6.2.8 定义, 假定  $M_n = X_n^2 - n$ , 则  $\{M_n\}$  是关于  $\{X_n\}$  的鞅. 这是因为

$$\begin{aligned} E[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[X_{n+1}^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n] \\ &= X_n^2 + 1 - (n+1) = X_n^2 - n = M_n \end{aligned}$$

易见, 此时  $M_n$  不是一个有界鞅, 不能立刻得出式 (6.2.5), (6.2.6) 成立, 但是可以证明, 存在  $C < \infty, \rho < 1$ , 使得

$$P\{T > n\} \leq C\rho^n \quad (6.2.7)$$

因为  $|M_n| \leq N^2 + n$ , 可知  $E[|M_T|] < \infty$ , 并且

$$E[|M_n| I_{\{T > n\}}] \leq C\rho^n(N^2 + n) \rightarrow 0$$

从而停时定理的条件满足, 我们有结论

$$E[M_T] = E[M_0] = a^2$$



注意到

$$\begin{aligned} E[M_T] &= E[X_T^2] - E[T] \\ &= N^2 P\{X_T = N\} + 0 \cdot P\{X_T = 0\} - E[T] = aN - E[T] \end{aligned}$$

从而

$$E[T] = aN - a^2 = a(N - a)$$

这是停止之前需要的平均时间.

注 式(6.2.7)是Markov链中的一个问题, 设 $\{X_n\}$ 是一个不可约的Markov链, 状态空间为  $\{0, 1, \dots, N\}$ , 则存在  $C < \infty, \rho < 1$ , 使得

$$P\{X_m \neq j, m = 0, 1, \dots, n | X_0 = i\} \leq C\rho^n$$

读者可自己证明.(提示: 存在 $\delta > 0$ , 使得 $\forall i$ , 从 $i$ 出发在 $N$ 步内到达过 $j$ 的概率大于 $\delta$ .)

37/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



## §6.3 连续鞅

前面我们讨论了鞅的停时定理,也称为可选抽样定理(optional sampling theorem)和鞅收敛定理.请注意这里的鞅都是以离散时间 $n$ 为参数的.事实上,对于连续参数鞅(仍称为鞅)也有类似定理.

首先给出鞅的定义.设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是一个完备的概率空间; $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ 为一个非降的 $\mathcal{F}$ 的子 $\sigma$ 代数流.本书中所涉及的子 $\sigma$ 代数流都是非降的,因此以后我们就将“非降的”省略,简称为子 $\sigma$ 代数流.

38/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**定义 6.3.1** 随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ (简记为 $\{X_t\}$ )称为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的, 如果对每个 $t \geq 0$ ,  $X_t$ 为 $\mathcal{F}_t$ 可测. 一个过程 $\{X_t\}$ 称为关于 $\{\mathcal{F}_t\}$ 的鞅, 如果:

- (1)  $\{X_t\}$ 为 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的过程,
- (2) 每个 $X_t$ 可积(即 $E[|X_t|] < \infty$ )
- (3) 且对一切 $0 \leq s < t$ , 有

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s, \quad a.s. \quad (6.3.1)$$

- 若随机过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是鞅, 则对 $t > 0$ , 有

$$E[X_t] = E[E[X_t | X_0]] = E[X_0] \quad (6.3.2)$$

39/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



**例 6.3.2** 设 $\xi$ 为一可积随机变量 ( $E(|\xi|) < +\infty$ )。则过程 $X_t := E(\xi|\mathcal{F}_t)$ 为  $(\mathcal{F}_t)$ 的鞅。

**例 6.3.3** 设 $\{Y_t, t \geq 0\}$ 是零初值具有平稳独立增量的随机过程.令

$$X_t = X_0 e^{Y_t}$$

其中 $X_0$ 为一常数.若 $E[e^{Y_t}] = 1$ , 则 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是一个鞅.事实上

$$E[|X_t|] = |X_0|E[e^{Y_t}] = |X_0|$$

再对 $0 \leq s < t$ , 有

$$\begin{aligned} E[X_t|X_r, 0 \leq r \leq s] &= E[X_s e^{Y_t - Y_s} | X_r, 0 \leq r \leq s] \\ &= X_s E[e^{Y_t - Y_s}] \\ &= X_s E[e^{Y_{t-s}}] = X_s, \quad a.s. \end{aligned}$$



**定义 6.3.4** 随机变量 $\tau$ (即 $\tau : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ ) 称为 $\mathcal{F}_t$ 停时, 如果 $P\{\tau < \infty\} = 1$ , 并且对一切 $t \geq 0$ ,  $\{\tau \leq t\}$ 是 $\mathcal{F}_t$ 可测的, 即

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

特别地, 当 $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ 时,  $\tau$ 称为关于随机过程 $\{X_t, t \geq 0\}$ 的停时. 若存在常数 $k > 0$ 使得 $P\{\tau \leq k\} = 1$ , 则称 $\tau$ 为有界停时.

41/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit



下面是鞅论的一个重要结论——停时定理，即在适当条件下，将式(6.3.2)中的 $t$ 置换成停时 $\tau$ 时，等式仍然成立.

**定理 6.3.5** 若 $\tau$ 是有界停时，则有

$$E[X_\tau] = E[X_0]$$

鞅论的另一个重要的结果是收敛定理.

**定理 6.3.6** 设 $\{X_t, t \geq 0\}$ 是一个鞅并且 $X_t \geq 0, \forall t \geq 0$ (简称为非负鞅)，则存在几乎处处收敛的有限极限，即有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty < \infty, \quad a.s.$$

42/42



GoBack

FullScreen

Close

Quit