



应用随机过程

吴卫星， 邓军

对外经济贸易大学

金融学院

1/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



第三章： 随机过程的基本概念与类型

- 随机过程的背景和基本概念
- 有限维分布与Kolmogorov定理
- 随机过程的基本类型
- 正态过程

2/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.1 随机过程的背景

在许多实际问题中，不仅需要对随机现象做特定时间点上的一次观察，且需要做多次的连续不断的观察，以观察研究对象随时间推移的演变过程.

例 3.1.1 对某股票的价格进行 T 年的连续观察，记录得

$$\{X_t, 0 \leq t \leq T\}.$$

例 3.1.2 从杂乱电讯号的一段观察 $\{Y(t), 0 < t < T\}$ 中，研究是否存在某种随机信号 $S(t)$.

例 3.1.3 监听器上收到某人的话音记录 $\{Z(t), \alpha < t < \beta\}$ 试问他是否确实是追踪对象.



例 3.1.4 设某种细菌群体的个数在时段 $(t, t + \Delta t)$ 内只能增加, 增加的数量与 t 时刻的细菌数成正比, 且 $x_0 = x(0) > 0$.

Proof 确定性下的模型: 设 t 时刻的细菌数为 $x(t)$, 有

$$\Delta x(t) = \lambda x(t) \Delta t, \quad \lambda > 0.$$

当 $\Delta t \rightarrow 0$, 可得到:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda x(t).$$

解得实值连续函数

$$x(t) = x(0) \exp(\lambda t).$$

随机下的模型: 设时刻 t 细菌数为随机变量 $X(t)$,



设 $(t, t + \Delta t)$ 内增加的细菌数与 Δt 有关而与 t 无关, 在 $X(t) = x$ 条件下, $X(t + \Delta t)$ 变为 $x + 1$ 个的概率为

$$P(X(t + \Delta t) = x + 1 | X(t) = x) = \lambda x \Delta t + o(\Delta t).$$

又设 $(t, t + \Delta t)$ 内增加不少于两个细菌的概率为 $o(\Delta t)$. 根据全概率公式可以得到:

$$\begin{aligned} P(X(t + \Delta t) = x) &= (1 - \lambda x \Delta t) P(X(t) = x) \\ &\quad + \lambda(x - 1) \Delta t P(X(t) = x - 1) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

最后得到:

$$P(X(t) = x) = C_{x-1}^{x-x_0} \exp(-\lambda x_0 t) (1 - \exp(-\lambda t))^{x-x_0}, \quad x \geq x_0.$$

注 1 (1) 与确定性结果不同处在固定时刻 t 未给出确定的细菌数, 给定 t 时刻的概率分布: $P(X(t) = x)$.



(2) 细菌个数 $X(t)$ 随时间 t 的推移而改变, 是一族随机变量

§3.2 基本概念

定义 3.2.1 随机过程是概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一族随机变量 $\{X(t), t \in T\}$, 其中 t 是参数, 它属于某个指标集 T , T 称为参数集.

注:

- 当 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ 时称之为随机序列或时间序列.
- 随机过程 $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$ 是定义在 $T \times \Omega$ 上的二元函数.

定义 3.2.2 用 E 表示随机过程的值域, 称 E 为过程的



状态空间.

例 3.2.3 设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是对应于抛均匀硬币的概率空间:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}, \quad \{\omega_1\} = \{head\}, \quad \{\omega_2\} = \{tail\}.$$

做 N 次抛硬币独立试验, 引入随机变量 $(\omega = (\omega_1, \dots, \omega_t, \dots, \omega_N))$

$$X(t, \omega) = \begin{cases} 0, & \omega_t = \omega_1 \\ 1, & \omega_t = \omega_2. \end{cases}$$

则 $X(t)$ 是一随机过程. 其参数集 $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, 状态空间 $E = \{0, 1\}$.

定义 3.2.4 随机过程的理解 称 $T \times \Omega = \{(t, \omega) : t \in T, \omega \in \Omega\}$ 为集合 T 与 Ω 的积集 (product set).

7/57



GoBack

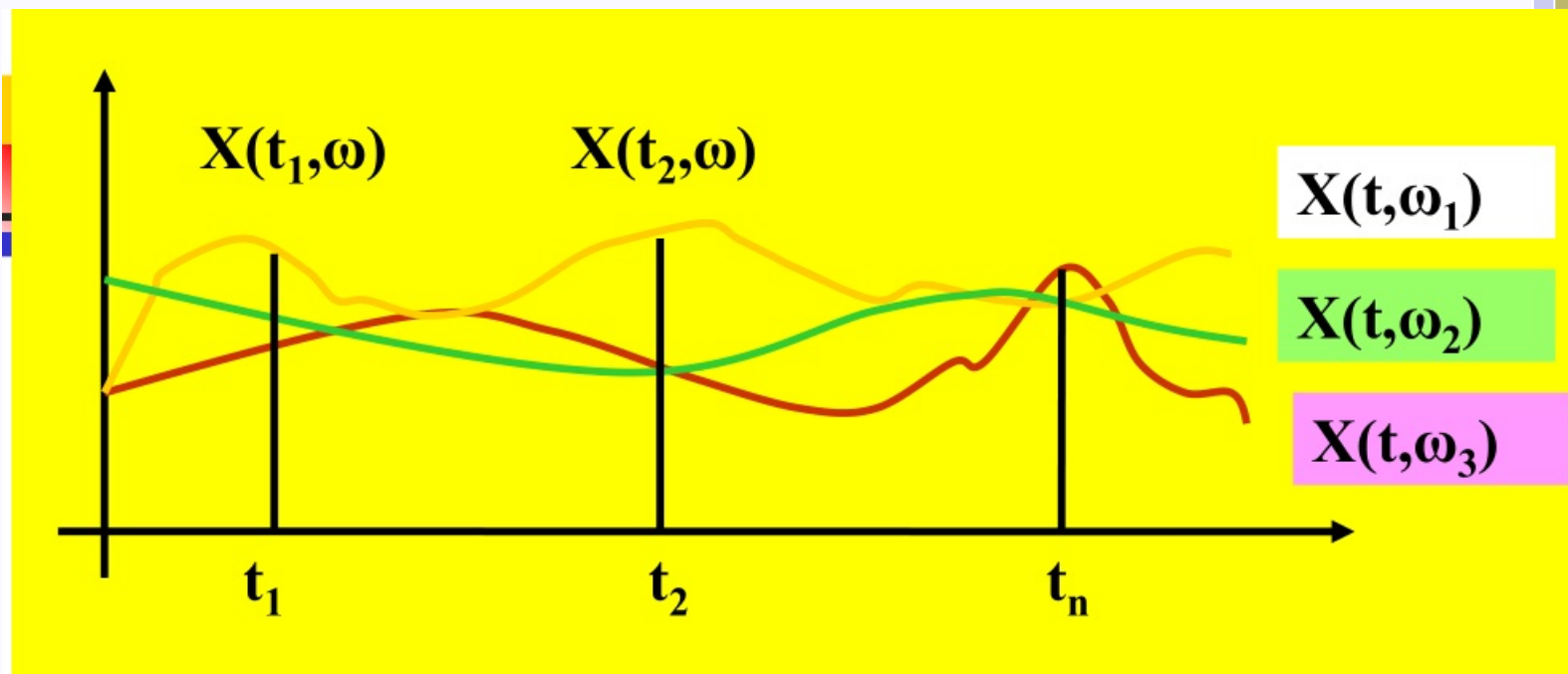
FullScreen

Close

Quit

随机过程可看成定义在积集 $T \times \Omega$ 上的二元函数.

- 当固定 $t \in T$, $X_t(\omega) = X(t, \omega)$ 是一个随机变量.
- 当固定 ω , 作为 $t \in T$ 的函数, $X(t, \omega)$ 是一个定义在 T 上的普通实值函数.





定义 3.2.5 对每一固定 $\omega \in \Omega$, 称 $X_t(\omega)$ 是随机过程 $\{X(t, \omega), t \in T\}$ 的一个样本函数, 或则轨道, 路径, 实现。

例 3.2.6 利用抛硬币的试验定义一个随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & \text{出现正面} \\ 2t, & \text{出现反面} \end{cases}$$

设出现正反面的概率相同, 写出 $X(t)$ 的所有样本函数.

Proof 记:

$$\omega_1 = \{\text{出现正面}\}, \quad \omega_2 = \{\text{出现反面}\}.$$

则 $X(t)$ 的所有现实为

$$X(\omega_1, t) = \cos(\pi t), \quad X(\omega_2, t) = 2t.$$



随机过程的分类:

- (1) $X(t)$ 表示系统在时刻 t 所处的状态.
- (2) $X(t)$ 的所有可能状态构成的集合为状态空间, 记为 S .
- (3) 依照状态空间可分为连续状态和离散状态;
- (4) 依照参数集, 可分为离散参数过程和连续参数过程.

注: 一般如果不作说明都认为状态空间是实数集 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}$ 的子集.

10/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



例 3.2.7 (随机游动) 一个醉汉在路上行走, 以概率 p 前进一步, 以概率 $1 - p$ 后退一步 (假定其步长相同). 以 $X(t)$ 记他在路上的位置, 则 $X(t)$ 就是直线上的随机游动.

例 3.2.8 (Brown运动) 英国植物学家Brown注意到飘浮在液面上的微小粒子不断进行无规则的运动, 这种运动后来称为Brown运动. 它是分子大量随机碰撞的结果. 若记 $(X(t), Y(t))$ 为粒子在平面坐标上的位置, 则它是平面上的Brown运动.

例 3.2.9 (排队模型) 顾客来到服务站要求服务. 当服务站中的服务员都忙碌, 即服务员都在为别的顾客服务时, 来的顾客就要排队等候. 顾客的到来、每个顾客所需的服务时间都是随机的, 所以如果用 $X(t)$ 表示 t 时刻的队长, 用 $Y(t)$ 表示 t 时刻到来的顾客所需的等待时间,



则 $\{X(t), t \in T\}, \{Y(t), t \in T\}$ 都是随机过程.

§3.3 有限维分布与Kolmogorov定理

定义 3.3.1 随机过程 $X = \{X(t), t \in T\}$, 对 $t \in T$,

$$F(t; x) := P(X(t) < x), \quad x \in R$$

为随机变量 $X(t)$ 的分布函数, 称为过程 X 的一维分布函数.

对任意 $s, t \in R$, 二维随机变量 $(X(s), X(t))$ 联合分布函数

$$F(s, t; x, y) := P(X(s) < x, X(t) < y).$$

称为随机过程 X 的二维分布函数。

定义 3.3.2 对任意有限个 $t_1, \dots, t_n \in T$, 定义随机过

12/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



程的 n 维分布 $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$:

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X(t_1) < x_1, \dots, X(t_n) < x_n).$$

随机过程的所有的一维分布, 二维分布, $\dots$, n 维分布等等的全体

$$\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

称为随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限分布族.

注: 知道了随机过程的有限维分布就知道了 $\{X(t), t \in T\}$ 中任意 n 个随机变量的联合分布. 也就掌握了这些随机变量之间的相互依赖关系.



分布族的性质:

(1) 对称性

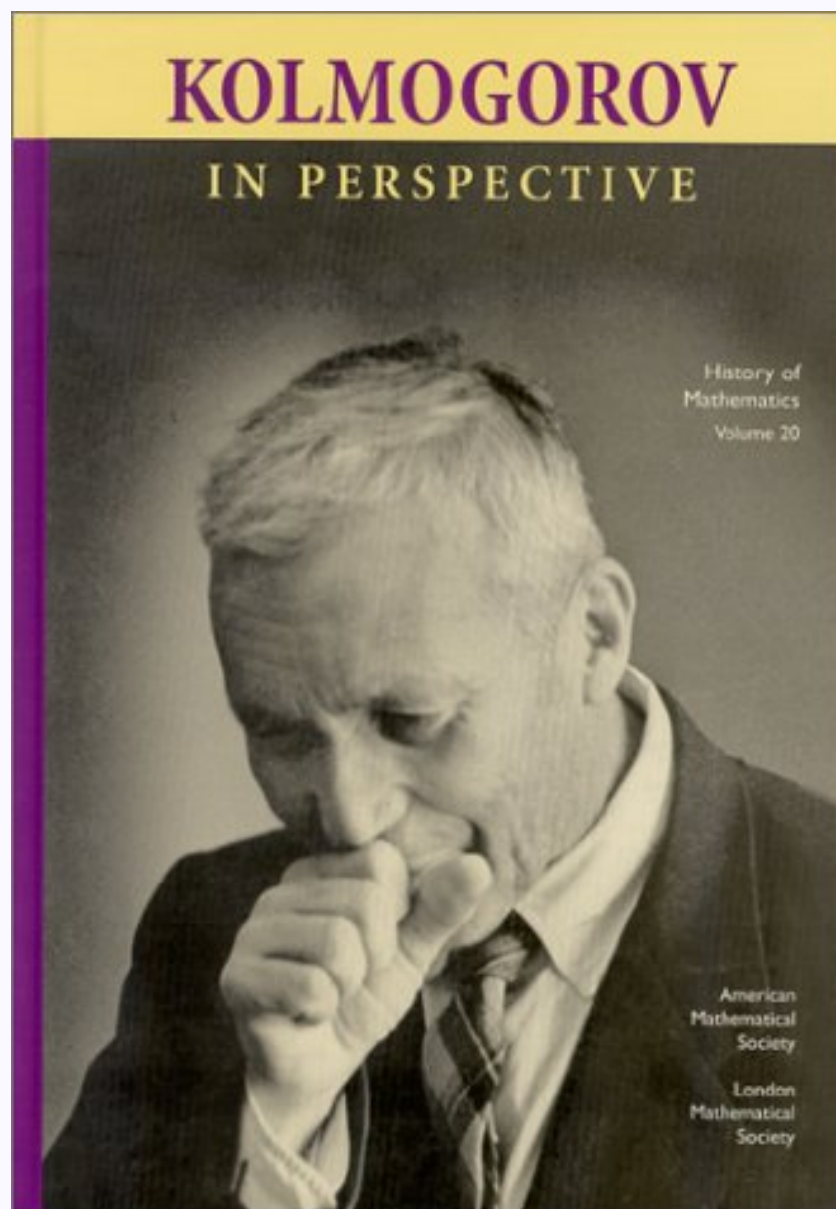
对 $(1, 2, \dots, n)$ 的任一排列 $(j_1, j_2, \dots, j_n)$, 有

$$\begin{aligned} & F_{t_{j_1}, \dots, t_{j_n}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_n}) \\ &= P(X(t_{j_1}) < x_{j_1}, \dots, X(t_{j_n}) < x_{j_n}) \\ &= P(X(t_1) < x_{t_1}, \dots, X(t_n) < x_{t_n}) \\ &= F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

(2) 相容性

对于 $m < n$, 有

$$F_{t_1, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, \dots, t_m}(x_1, \dots, x_m).$$



15/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



定理 3.3.3 设分布函数族 $\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$ 满足上述的对称性和相容性, 则必存在一个随机过程 $\{X(t), t \in T\}$, 使

$$\{F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n), t_1, \dots, t_n \in T, n \geq 1\}$$

恰好是 $\{X(t), t \in T\}$ 的有限维分布族.

注: 随机过程的有限维分布函数族是随机过程概率特征的完整描述, 它是证明随机过程存在性的有力工具. 但是在实际问题中, 要知道随机过程的全部有限维分布是不可能的, 因此, 人们想到了用随机过程的某些数字特征来刻画随机过程.

例 3.3.4 设随机过程 $\{X(t, \omega), t \in R\}$ 只有两条样本

函数

$$X(t, \omega_1) = 2 \cos(t), \quad X(t, \omega_2) = -2 \cos(t), \quad t \in R.$$

且: $P(\omega_1) = 2/3, \quad P(\omega_2) = 1/3.$

求:

- 一维分布函数 $F(0, x)$ 和 $F(\pi/4, x)$;
- 二维分布函数 $F(0, \pi/4; x, y).$

Proof 易知:

$$X(0) = \begin{cases} 2, & \frac{2}{3} \\ -2, & \frac{1}{3} \end{cases} \quad X\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{cases} \sqrt{2}, & \frac{2}{3} \\ -\sqrt{2}, & \frac{1}{3} \end{cases}$$

同时可以得到 $X(0), X(\pi/4)$ 的联合分布

$$(X(0), X(\pi/4)) = \begin{cases} (2, \sqrt{2}), & \frac{2}{3} \\ (-2, -\sqrt{2}), & \frac{1}{3} \end{cases}$$



17/57

||◀ ▶||

◀ ▶

GoBack

FullScreen

Close

Quit



Question: $X(0)$, $X(\pi/4)$ 相互独立吗??

例 3.3.5 设随机过程

$$X(t) = A \cos(\Theta), \quad t \in R$$

其中 k 是正常数, 随机变量 A 与 Θ 相互独立, $A \sim U(0, 1)$, $\Theta \sim U(-\pi, \pi)$. 试求过程的一维概率密度

Proof 首先设 $Y(t) = a \cos(\Theta)$, 其中 a 为常数, 易求的 $Y(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - y^2}}, & |y| < a \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

注意到: $Y(t) = X(t)|_{A=a}$, 由全概率公式和独立性, 可以得

18/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit

到：

$$\begin{aligned} f_X(t; x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|A}(x|a) dF_A(a) = \int_0^1 f_{X|A}(x|a) da \\ &= \int_x^1 \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} da = -\frac{1}{\pi} \log\left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2} + 1}\right). \end{aligned}$$



19/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



随机过程的数字特征

定义 3.3.6 过程 $\{X(t), t \in T\}$ 的 n 维特征函数定义为

$$\psi(t_1, t_2, \dots, t_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ E(\exp(i(\theta_1 X(t_1) + \theta_2 X(t_2) + \dots + \theta_n X(t_n))))$$

称 $\{\psi(t_1, t_2, \dots, t_n; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n); t_1, t_2, \dots, t_n, n \geq 1\}$ 为 X 的有限维特征函数族.

定义 3.3.7 设 $\{X(t), t \in T\}$ 是一随机过程.

(1) 称 $X(t)$ 的期望 $m_X(t) = E[X(t)]$ 为过程的均值函数(如果存在的话).

(2) 如果 $\forall t \in T, E[X^2(t)]$ 存在, 则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程.

此时, 称函数 $\gamma(t_1, t_2) = E[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))]$,



$t_1, t_2 \in T$ 为过程的协方差函数；称 $Var[X(t)] = \gamma(t, t)$ 为过程的方差函数；称 $R_X(s, t) = E[X(s)X(t)]$, $s, t \in T$ 为自相关函数.

由Schwartz不等式知，二阶矩过程的协方差函数和自相关函数存在，且有 $\gamma_X(s, t) = R_X(s, t) - m_X(s)m_X(t)$.

例 3.3.8 设 p, q 是两个随机变量，构成随机过程

$$X(t) = p + qt, \quad t \in T$$

均值函数为： $m(t) = E[X(t)] = E(p) + tE(q)$. 自相关函数为

$$\begin{aligned} R(s, t) &= E[(p + qs)(p + qt)] \\ &= E(p^2) + E(pq)(s + t) + E(q^2)st. \end{aligned}$$



例 3.3.9 利用抛硬币的试验定义一个随机过程

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & \omega_1 \\ 2t, & \omega_2. \end{cases}$$

求该过程的均值函数, 方差函数, 相关函数, 协方差函数.

Proof 因对任意实数 $t \in R$, 有:

$$X(t) = \begin{cases} \cos(\pi t), & \frac{1}{2} \\ 2t, & \frac{1}{2}. \end{cases}$$

22/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$$m_X(t) = E(X(t)) = \frac{1}{2} \cos(\pi t) + t$$

$$E(X^2(t)) = \frac{1}{2} \cos^2(\pi t) + 2t^2$$

$$D_X(t) = \left(\frac{1}{2} \cos(\pi t) - t \right)^2$$

$$\begin{aligned} R(s, t) &= E(X(s)X(t)) = \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi s) + \frac{1}{2} * 2t * 2s \\ &= \frac{1}{2} \cos(\pi t) \cos(\pi s) + 2ts. \end{aligned}$$

例 3.3.10 设随机过程

$$X(t) = A \cos(\beta t + \Theta)$$

其中 β 是正常数, 随机变量 A 与 Θ 相互独立, $A \sim N(0, 1)$, $\Theta \sim U(0, 2\pi)$. 试求过程的均值函数和相关函数.



Proof

$$\begin{aligned}m_X(t) &= E(X(t)) = E(A \cos(\beta t + \Theta)) \\&= E(A)E(\cos(\beta t + \Theta)) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R(s, t) &= E(X(s)X(t)) \\&= E(A^2 \cos(\beta t + \Theta) \cos(\beta s + \Theta)) \\&= \frac{1}{2} \cos(\beta(t - s)).\end{aligned}$$

例 3.3.11 $X(t) = X_0 + tV, a \leq t \leq b$, 其中 X_0 和 V 是相互独立且服从 $N(0, 1)$ 分布的随机变量.

注: 易知 $X(t)$ 服从正态分布, 且 $X(t_1), \dots, X(t_n)$ 也是 n 维正态分布. 所以只要知道它的一阶矩和二阶矩就完全确定了

它的分布.

$$m_X(t) = E[X(t)] = E(X_0 + tV) = EX_0 + tEV = 0$$

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= E[X(t_1)X(t_2)] = E[(X_0 + t_1V)(X_0 + t_2V)] \\ &= E[X_0^2] + t_1t_2E[V^2] = 1 + t_1t_2. \end{aligned}$$



25/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.4 复随机过程（了解内容）

定义 3.4.1 设 X 和 Y 为两个实值随机过程，称

$$Z(t) = X(t) + iY(t), \quad i = \sqrt{-1}.$$

为复随机过程。其均值函数为

$$m_Z(t) = E[X(t)] + iE[Y(t)].$$

方差函数为：

$$D_Z(t) = E(Z(t) - m_Z(t))^2 = D_X(t) + D_Y(t).$$

自相关系数为：

$$R_Z(s, t) = E\left(Z(s)\overline{Z(t)}\right).$$



§3.5 随机过程的基本类型

§3.5.1 平稳过程

定义 3.5.1 如果随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 对任意的 $t_1, \dots, t_n \in T$ 和任意的 h (使得 $t_i + h \in T$)有,
 $(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h))$ 与 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 具有相同的联合分布, 记为

$$(X(t_1 + h), \dots, X(t_n + h)) \stackrel{d}{=} (X(t_1), \dots, X(t_n)) \quad (3.5.1)$$

其中 $\stackrel{d}{=}$ 表示同分布。则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为严平稳的。

例 3.5.2 投掷一枚均匀的硬币

定义 3.5.3 如果随机过程 $X(t)$ 的所有二阶矩都存在, 并且均值函数 $E[X(t)] = \mu$, 协方差函数 $\gamma(t, s)$ 只与时间差 $t -$

27/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



s 有关, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为宽平稳过程或二阶平稳过程.

注:

- 对于宽平稳过程, 由于 $\gamma(s, t) = \gamma(0, t - s), s, t \in \mathbb{R}$, 可记为 $\gamma(t - s)$;
- $\gamma(t)$ 为偶函数, 且 $\gamma(0) = \text{var}(X(t)), |\gamma(\tau)| \leq \gamma(0)$;
- $\gamma(\tau)$ 具有非负定性, 即对任意时刻 t_k 和实数 $a_k, k = 1, 2, \dots, N$, 有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \gamma(t_i - t_j) \geq 0.$$

当参数 t 仅取整数值 $0, \pm 1, \pm 2 \dots$ 或 $0, 1, 2 \dots$ 时, 称平稳过程为平稳序列.

例 3.5.4 (平稳白噪声序列) 设 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为一列两两互不相关的随机变量序列, 满足 $EX_n = 0, n =$

28/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



$0, 1, 2, \dots$, 且

$$EX_m X_n = \begin{cases} 0, & \text{当 } m \neq n \\ \sigma^2, & \text{当 } m = n \end{cases}$$

则白噪声序列 $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ 为平稳的. 这是因为协方差函数 $cov(X_n, X_m) = E(X_n X_m)$ 只与 $m - n$ 有关.

例 3.5.5 (滑动平均序列) 设 $\{\varepsilon_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 为一列互不相关的且有相同均值 m 和方差 σ^2 的随机变量序列. 设 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 为任意 k 个实数. 考虑如下定义序列的平稳性:

$$X_n = a_1 \varepsilon_n + a_2 \varepsilon_{n-1} + \dots + a_k \varepsilon_{n-k+1}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

容易看出

$$EX_n = m(a_1 + \dots + a_k).$$



令 $\xi_j = \varepsilon_j - m$, 则由 ε_j 的两两互不相关性知, 协方差函数

$$\begin{aligned}\gamma(n+\tau, n) &= E[(X_n - m(a_1 + \cdots + a_k))(X_{n+\tau} - m(a_1 + \cdots + a_k))] \\ &= E[(a_1\xi_n + \cdots + a_k\xi_{n-k+1})(a_1\xi_{n+\tau} + \cdots + a_k\xi_{n+\tau-k+1})] \\ &= \begin{cases} \sigma^2(a_{\tau+1}a_1 + \cdots + a_k a_{k-\tau}), & \text{若 } 0 \leq \tau \leq k-1, \\ 0, & \text{若 } \tau \geq k, \end{cases}\end{aligned}$$

即协方差函数仅与时间间隔 τ 有关. 故 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \cdots\}$ 为平稳序列.

30/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



考虑如下两个特殊平稳过程：

设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为独立同分布随机变量序列， $E[X_n^2] < \infty$, $E[X_n] = m, n = 0, 1, 2, \dots$.

$\{Y_n = Y, n \geq 0\}$ ，其中 Y 是随机变量， $E[Y^2] < \infty$.

可以用这两个过程来阐述不同平稳过程之间的差异.对过程 $\{X_n\}$ 而言，由大数定律知，

$$\frac{1}{n}(X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1})$$

以概率1收敛于常数 m .但对于过程 $\{Y_n\}$ 而言

$$\frac{1}{n}(Y_0 + Y_1 + \dots + Y_{n-1}) = Y$$

即经对时间的平均后，随机性没发生任何改变.于是自然产生这样的问题：在何种条件下，平稳过程对时间的平均值可以等于过程的均值？ $\rightarrow$ 遍历性定理。



§3.5.2 独立增量过程

一、独立过程

定义 3.5.6 定义对任意的正整数 n 及任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ 随机变量 $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$ 相互独立, 称

$$\{x(t), t \in T\}$$

为独立过程。

注：独立随机过程的有限维分布由一维分布确定

$$F_n(t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_k(t_k, x_k)$$

例 3.5.7 高斯白噪声：实值时间序列 $\{x(n), n \in N\}$ 的

$$E\{x(n)\} = 0, D[(x(n))] = \sigma^2$$

32/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



自相关函数为

$$R(m, n) = \begin{cases} 0, & m \neq n; \\ \sigma^2, & m = n. \end{cases}$$

如果两两序列不相关, 则称 $\{x(n), n \in N\}$ 为离散白噪声(序列)。

又若 $x(n)$ 都服从正态分布, 称 $\{x(n), n \in N\}$ 是高斯白噪声序列. 对于 n 维正态随机变量有相互独立 $\Leftrightarrow$ 不相关故高斯白噪声序列是独立时间序列。

定义 3.5.8 如果对任何 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T, t_1 < t_2 < \dots < t_n$ 随机变量 $X(t_2) - X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ 是相互独立的, 则称 $X(t)$ 为 **独立增量过程** 如果对任何 t_1, t_2 , 有 $X(t_1 + h) - X(t_1) \stackrel{d}{=} X(t_2 + h) - X(t_2)$, 则称 $\{X(t), t \in T\}$ 为是 **平稳增量过程** 兼有独立增量和平稳增量的过程称



为平稳独立增量的过程.

随机过程 $\{X(t), t \geq 0\}$ 的特征函数为 $\psi_{X(t)}(a) = E[e^{iaX(t)}]$, 我们有如下定理

定理 3.5.9 假设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一个独立增量过程, $X_0 = 0$. 则 $X(t)$ 具有平稳增量的充分必要条件是: 其特征函数具有可乘性, 即

$$\psi_{X(t+s)}(a) = \psi_{X(t)}(a)\psi_{X(s)}(a)$$

证: 必要性显然, 以下证明充分性。由独立增量性有

$$\begin{aligned}\psi_{X(t)}(a)\psi_{X(s)}(a) &= \psi_{X(t+s)}(a) \\ &= E[e^{iaX(t+s)}] \\ &= E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\}E[e^{iaX(s)}] \\ &= E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\}\psi_{X(s)}(a)\end{aligned}$$



由此可得

$$E\{e^{ia[X(t+s)-X(s)]}\} = \psi_{X(t)}(a) = E[e^{iaX(t)}]$$

即该过程具有平稳的增量。

注：平稳独立增量过程的均值函数是时间 t 的线性函数。
本课程后面将要介绍的Poisson过程和Brown运动都是这类过程。这两类过程是随机过程理论中的两块最重要的基石。

例 3.5.10 若 $\{X_n, n \in N\}$ 是独立时间序列, 令

$$Y(n) = \sum_{k=0}^n X(k), \quad X(0) = 0.$$

则 $\{Y(n), n \in N^+\}$ 是独立增量过程. 又若 $X(n), n = 1, 2, \dots$ 相互独立同分布, 则 $\{Y(n), n \in N^+\}$ 是平稳独立增量过程.

Proof 对于任意的 $n_1, n_2, \dots, n_m$

$$\begin{aligned} Y(n_2) - Y(n_1) &= \sum_{k=0}^{n_2} X(k) - \sum_{k=0}^{n_1} X(k) \\ &= X(n_1 + 1) + \dots + X(n_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(n_3) - Y(n_2) &= \sum_{k=0}^{n_3} X(k) - \sum_{k=0}^{n_2} X(k) \\ &= X(n_2 + 1) + \dots + X(n_3). \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} Y(n_m) - Y(n_{m-1}) &= \sum_{k=0}^{n_m} X(k) - \sum_{k=0}^{n_{m-1}} X(k) \\ &= X(n_{m-1} + 1) + \dots + X(n_m). \end{aligned}$$

因为 $X(n), n = 1, 2, \dots$ 相互独立, 所以 $\{Y(n), n \in N^+\}$ 是独立增量过程。



独立平稳增量过程的性质

引理 3.5.11 如果 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程,
 $X(0) = 0$, 则

- 均值函数 $m(t) = kt$, 其中 k 为一常数。
- 方差函数 $D(t) = \sigma^2 t$.
- 协方差函数 $C(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$.

Proof 因均值函数和方差函数满足

$$m(s+t) = m(s) + m(t)$$

$$D(s+t) = D(s) + D(t).$$

由此可得到: $m(t) = kt$ 和 $D(t) = \sigma^2 t$. 如果 $s < t$, 可以得

37/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



到:

$$\begin{aligned}C(s, t) &= E(X(t) - m(t))(X(s) - m(s)) \\&= E(X(t)X(s)) - m(t)m(s) \\&= E(X(t) - X(s) + X(s))X(s) - k^2ts \\&= E(X(t) - X(s)) * EX(s) + EX(s)^2 - k^2ts \\&= k(t - s) * ks + \sigma^2s - k^2ts = \sigma^2s.\end{aligned}$$

引理 3.5.12 独立增量过程的有限维分布由一维分布和增量的分布确定.

Proof 对于独立增量过程 $\{X(t), t \geq 0\}$, 任取 $t_1 < t_2 < \cdots t_n$, 令

$$Y_1 = X(t_1), Y_2 = X(t_2) - X(t_1), \cdots, Y_n = X(t_n) - X(t_{n-1}).$$

相互独立性, 据此利用特征函数法可证明结论.

§3.6 正态分布

在现实问题中, 满足一定条件的随机变量之和的极限服从正态分布. 股票的价格是众多投资者的相互作用形成的, 也可以假设服从正态分布. 由于一个随机过程可以用有限维分布来描述, 为研究正态过程应首先研究多维正态分布随机变量.



39/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit

多维正态随机变量

概率密度与特征函数

若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \sigma_1^2; \mu_2, \sigma_2^2; \rho)$. 记:

$$E \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \mu.$$
$$B = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

则 $Z := (X, Y)$ 联合概率密度为

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} * \\ &\exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \frac{x-\mu_2}{\sigma_2} + \frac{(y-\mu_1)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (Z - \mu)^T B^{-1} (Z - \mu) \right\}. \end{aligned}$$



定义 3.6.1 设 $B = (b_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, μ 是 n 维实值列向量, 定义 n 维随机向量

$$Z = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

的联合密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2\pi|B|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(X - \mu)^T B^{-1}(X - \mu) \right\}.$$

其中, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 称 Z 服从 n 维正态分布.

当 $B = (b_{ij})$ 是 n 阶正定对称矩阵, 有 $|B| \neq 0$. 如果 $|B| = 0$, 则不能利用上式来计算概率密度函数。

定理 3.6.2 n 维正态分布随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的特征函数为

$$\psi(t) = \exp \left\{ i\mu^T t - \frac{1}{2} t^T B t \right\}, \quad (3.6.1)$$

其中, $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$.

定义 3.6.3 若 μ 是 n 维实向量, B 是 n 阶非负定对称阵, 称以式(3.6.1)中的 $\psi(t)$ 为其特征函数的 n 维随机变量 X 服从 n 维正态分布.



42/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



边缘分布及二阶矩

以下总假定随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 $N(\mu, B)$.

定理 3.6.4 n 维正态分布随机变量的任一子向量

$$(X_{k_1}, X_{k_2}, \dots, X_{k_m}), \quad m \leq n$$

也服从正态分布 $N(\tilde{\mu}, \tilde{B})$, 其中 $\tilde{\mu} = (\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \dots, \mu_{k_m})$. $\tilde{B}$ 是 B 保留第 $k_1, k_2, \dots, k_n$ 行和列所得到的 m 阶矩阵。

43/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



多元正态分布的边缘分布仍是正态分布

定理 3.6.5 设 μ 和 B 分别是随机向量 X 的数学期望及协方差矩阵, 即

$$E(X_i) = \mu_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$b_{ij} = E(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j).$$

定理 3.6.6 n 维正态分布随机向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 相互独立的充要条件是它们两两不相关.

44/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit

正态随机向量的线性变换

服从正态分布的随机向量在线性变换下具有一些特殊性质，有很大的理论价值与实用价值。

设 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 记 $E(x) = \mu$, 协方差矩阵为 B , X 的分量的线性组合

$$Y = \sum_{j=1}^n l_j x_j = L^T X, L^T = (l_1, l_2, \dots, l_n)$$

则有,

$$E(y) = \sum_{j=1}^n l_j \mu_j = L^T \mu,$$

$$D(y) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n l_j l_k b_{jk} = L^T B L,$$

若 $C = (c_{jk})_{m \times n}$, $Z = CX$, 则

$$E(Z) = E(CX) = CE(X) = C\mu, D(Z) = CBC^T$$

定理 3.6.7 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 服从 n 维正态分



布 $N(\mu, B)$ 的充要条件是它的任何一个非零线性组合

$$\sum_{j=1}^n l_j X_j,$$

服从一维正态分布。

因此，可通过研究一维正态分布来研究多维正态随机变量。

定理 3.6.8 若 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 服从 n 维正态分布 $N(\mu, B)$, $C = (c_{jk})_{m \times n}$ 是任意矩阵, 则 $Y = CX$ 服从 m 维正态分布 $N = (C\mu, CBC^T)$.

46/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit

Proof 对于任意 m 维实值列向量 t , Y 的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi_y(t) &= E(e^{it^\tau y}) = E(e^{it^\tau Cx}) = E(e^{i(C^\tau t)^\tau x}) \\ &= \exp\{i\mu^\tau (C^\tau t) - \frac{1}{2}(C^\tau t)^\tau B(C^\tau t)\} \\ &= \exp\{i(C\mu)^\tau t - \frac{1}{2}t^\tau (CBC^\tau)t\}\end{aligned}$$

即随机向量 $Y = CX$ 服从 m 维正态分布 $N = (C\mu, CBC^\tau)$

问题? 能否保证 $Y = CX$ 服从(非退化)正态分布?

- 1) 当 $|CBC^\tau| \neq 0$ 时, 随机向量 Y 服从正态分布(非退化), 从而非退化正态分布随机向量 X 的满秩线性变换仍服从非退化正态分布.
- 2) 一般不能保证结论成立.

例 3.6.9 设随机变量 x_0 与 v 相互独立, 都服从标准正态



分布 $N(0, 1)$, 令

$$x_1 = x_0 + v, x_2 = x_0 + 2v, x_3 = x_0 + 3v,$$

问: (x_1, x_2, x_3) 是否非退化正态分布?

Proof

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, 1 \\ 1, 2 \\ 1, 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix}$$

因

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ v \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

48/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



x 的协方差矩阵为

$$CBC^T = C \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} C^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|CBC^T| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ 不是(非退化)正态分布.

一般, 二维相互独立正态随机向量的线性变换不是 n 维($n > 2$)非退化正态分布.

推论 3.6.10 若随机向量 X 服从 $N(\mu, B)$, 则存在一个正交变换 U , 使得 $Y = UX$ 是一个具有独立正态分布分量的随机向量.



Proof 实对称矩阵 B , 存在正交阵 U , 使 $UBU^T = D$,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & d_2 & \\ & & \dots \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

d_i 是 B 的特征向量. 若 B 是正定阵 (从而非奇异的) $\Rightarrow B$ 有 n 个线性无关特征向量. 设 U 是以特征向量为列构成的正交阵, 令 $Y = UX$ 则得证.

50/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



§3.6.1 正态随机过程

定义 3.6.11 随机过程 $\{x(t), t \in T\}$ 称为正态过程,如果它的任意有限维分布都是正态分布.

注:

- 1) 上述几个定理均可应用于正态过程.
- 2) 正态过程是二阶矩过程,并且它的 n 维分布由其前二阶矩完全确定.

对任意的 $n \geq 1, t_1, t_2, \dots, t_n \in T,$

$$(X(t_1), \dots, X(t_n))^T \sim N(\mu, B),$$



$$\mu = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \dots \\ m(t_n) \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} C(t_1, t_1) & C(t_1, t_2) & \dots & C(t_1, t_n) \\ C(t_2, t_1) & C(t_2, t_2) & \dots & C(t_2, t_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C(t_n, t_1) & C(t_n, t_2) & \dots & C(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$
$$C(t_i, t_j) = E\{[X(t_i) - m(t_i)][X(t_j) - m(t_j)]\}$$
$$(1 \leq i, j \leq n)$$

- 3) 随机过程 $\{X(t), t \in T\}$,若存在 n ,对 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, n 维随机变量 $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ 服从退化正态分布,称 $\{X(t), t \in T\}$ 为退化正态过程.

例 3.6.12 随机信号

52/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit

设

$$X(t) = \xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t, t \in R$$

$$E(\xi) = E(\eta) = 0, E(\xi^2) = E(\eta^2) = \sigma^2, \omega$$

为常数, ξ 与 η 相互独立同服从正态分布,

- 1) 试求 $X(t)$ 的均值函数和相关函数;
- 2) 写出一维概率密度和二维概率密度.

Proof

- 1)

$$E\{(X(t))\} = E(\xi) \cos \omega t + E(\eta) \sin \omega t = 0$$



53/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



因 $E(\xi\eta) = 0$ 故

$$\begin{aligned} R(s, t) &= E\{(\xi \cos \omega t + \eta \sin \omega t)(\xi \cos \omega s + \eta \sin \omega s)\} \\ &= E(\xi^2) \cos \omega t \cos \omega s + E(\eta^2) \sin \omega t \sin \omega s \\ &= \sigma^2 \cos \omega(s - t) = \sigma^2 \cos(\omega\tau), (\tau = s - t). \end{aligned}$$

由此可得:

$$\Rightarrow D(X(t)) = R(t, t) = \sigma^2 \cos 0 = \sigma^2.$$

● 2) $X(t)$ 的一维密度为

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, x \in R$$

$X(t_i)$ 是相互独立正态随机变量的线性组合,故 $(X(t_1), X(t_2))$ 服从二维正态分布,其相关系数为

$$\rho = \frac{R(s, t) - m(s)m(t)}{\sqrt{R(S, S)}\sqrt{R(t, t)}} = \frac{\sigma^2 \cos \omega\tau}{\sigma^2} = \cos \omega\tau$$



得过程 $X(t)$ 的二维密度为

$$f(x_1, x_2, s, t) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\cos^2\omega\tau}} e^{\frac{x_1^2-2x_1x_2\cos\omega\tau+x_2^2}{2\sigma^2(1-\cos^2\omega\tau)}},$$

其中, $(x, y) \in R_2$.

仅与 $\tau = s - t$ 有关.

问题 :能否写出此过程的 n 维概率密度?

可证明: 对于任意的 $n, n \geq 3$ 任意的 $t_1, t_2, \dots, t_n$,
 $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ 不服从 n 维正态分布.

55/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



实际应用：

怎样验证随机过程 $X_{(t)} = \{X(t), t \in T\}$ 是正态随机过程？

任取 $n \geq 1$, 及 $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, 记

$$X = (X(t_1), \dots, X(t_n)),$$

算法步骤如下：

- 1) 计算 X 的 n 维协方差矩阵 B ;
- 2) 验证 B 的正定性;

- 3) 求正交矩阵 U , 使 $UBU^T = D = \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$

56/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit



- 4) 令 $Y = UX$, Y 的协方差矩阵为 D ;
称将 X 去相关性
- 5) 检验 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 的独立性;
随机过程统计推断问题
- 6) 检验 Y 的一维分布的正态性.

结论:

若检验得 $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ 是相互独立的正态随机变量,
 $\Rightarrow X = U^{-1}Y$ 是 n 维正态随机变量, 即 $X_t = \{X(t), t \in T\}$ 是正态随机过程.

思考

- 1) 为以上算法写出理论依据;
- 2) 你能考虑用其他方法验证吗?

57/57



GoBack

FullScreen

Close

Quit